



# Modèles combinatoires implicites et résolution de problèmes en classe de 4ème : une étude des effets liés à la sémantique des situations

Richard Rudat

## ► To cite this version:

Richard Rudat. Modèles combinatoires implicites et résolution de problèmes en classe de 4ème : une étude des effets liés à la sémantique des situations. Education. Université René Descartes - Paris V, 2007. Français. NNT : . tel-00270060

**HAL Id: tel-00270060**

**<https://theses.hal.science/tel-00270060>**

Submitted on 3 Apr 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE PARIS V – RENE DESCARTES**  
**FACULTE DE SCIENCES HUMAINES ET SOCIALES**

**THESE**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS V**

Discipline : SCIENCES DE L'EDUCATION

Présentée par Richard Rudat

**Modèles combinatoires implicites  
et résolution de problèmes en classe de 4<sup>ème</sup> :  
une étude des effets liés à la sémantique des situations**

**Thèse présentée le 26 février 2007**

Sous la direction de Sylvette Maury

Jury :

Denis BUTLEN	Rapporteur	Maître de conférence HDR à l'IUFM de Créteil
Sylvette MAURY	Directrice	Professeur à l'Université Paris V
Gérard VERGNAUD		Directeur de recherche CNRS, Université Paris VIII
Annick WEIL-BARAIS	Rapporteur	Professeur à l'Université d'Angers

## *Remerciements*

*En m'efforçant de réaliser cette recherche, je me suis trouvé sur des chemins à la fois passionnants mais semés de difficultés et d'obstacles de toutes sortes. Qu'il me soit permis d'exprimer ma profonde reconnaissance à Sylvette Maury qui m'a constamment encouragé tout au long de ce travail. Son aide m'a été précieuse et je souhaite particulièrement rendre hommage à sa disponibilité, à sa patience et à cette perspicacité qui lui permet de trouver inmanquablement les défauts, les faiblesses et les erreurs que je ne savais éviter. Ses remarques, ses enseignements et ses suggestions ont été pour ma formation d'irremplaçables sources de progrès.*

*Je remercie Annick Weil-Barais et Denis Butlen d'avoir accepté de rapporter sur mon travail et d'être membre du jury. Je souhaite rendre spécialement hommage à Gérard Vergnaud grâce à qui j'ai découvert avec passion la Didactique des Mathématiques et je le remercie également d'avoir accepté de participer à ce jury.*

*J'adresse mes chaleureux remerciements à Johanna Boulanger, Marie Nabbout, Nasse-ra Sebaï, Adrien Bourg, Charles Chandler et Marc Vantourout pour l'aide qu'ils ont su m'apporter quand j'en avais besoin.*

*Que tous les élèves et les professeurs qui ont participé à cette recherche reçoivent ma reconnaissance pour leur disponibilité. Je n'oublie pas, non plus, les personnes qui m'ont amicalement aidé d'une façon ou d'une autre, souvent par de conseils techniques, toujours en prenant sur leur temps.*

*J'adresse enfin à Caroline, Justin et Valérie, à ma famille et à mes parents, à mes proches, à mes amis ma profonde gratitude pour le soutien qu'ils m'ont apporté et pour la bienveillante compréhension qu'il était souvent nécessaire d'avoir à mon égard. Que ce travail leur soit dédié.*

**Résumé :** Dans ce travail on s'intéresse à certains effets liés à la sémantique des énoncés sur les procédures et processus de résolution de problèmes de combinatoire du type  $C_n^2$ , soumis à des élèves de classe de 4<sup>ème</sup>. Notre objectif est de proposer un modèle relativement complet qui décrive les liens entre les productions et l'activité des élèves d'une part et les contextes sémantiques d'autre part. La principale variable étudiée concerne les modèles combinatoires implicites. Afin de relever l'ensemble des procédures observables, une première épreuve est organisée sous forme de devoir sur table. La deuxième épreuve a pour ambition de se placer au niveau des processus de résolution. Elle est organisée sous forme de travail en groupe. Une analyse du contenu des échanges permet d'appréhender les interprétations des énoncés. L'ensemble des observations nous conduit à définir deux modèles de résolution dominants avec quelques variantes.

**Mots-clés :** Combinaison, configuration combinatoire, contexte sémantique, didactique des mathématiques, modèle combinatoire implicite, modèle de résolution, procédure, représentation, résolution de problème.

---

**Summary:** This study focuses on the effect of semantic wording of combinatorial problems of type  $C_n^2$  on the procedures and the problem solving processes used by Gr8 students. Our object is to propose a relatively comprehensive model describing existing links between students' productions and the semantic contexts. The main variable studied is the implicit combinatorial models. The first administrated task consists of an individual work and aims at identifying all types of discernible procedures. The second task was organized in group work and aims at identifying processes used in problem solving. The content analysis of interactions allows seizing students' interpretations of problems wording. The observations carried out leads us to define two dominant models in problem solving with a few variants.

**Keywords:** Combination, combinative configuration, didactic of mathematics, implicit combinative model, problem solving, procedure, representation, semantic context, solving model.

## **SOMMAIRE**

<b>I. Introduction.....</b>	<b>6</b>
<b>1. Présentation de la recherche, son objet .....</b>	<b>6</b>
<b>2. Approches théoriques .....</b>	<b>7</b>
• La question des connaissances .....	9
• La question des contenus mathématiques .....	10
• Les conséquences méthodologiques .....	11
<b>3. Présentation de quelques références qui fondent cette recherche .....</b>	<b>12</b>
A. Les modèles combinatoires implicites .....	12
• Dubois (1984).....	12
• Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (1997).....	15
B. Sujet « modélisant » et sujet « producteur de modèles » .....	17
<b>C. Les outils de modélisation et la dimension sémiotique de la résolution de problème.....</b>	<b>20</b>
a. Un exemple : l'introduction du schéma en arbre.....	20
b. Quelques réflexions théoriques concernant la dimension sémiotique en mathématiques.....	23
c. Signe et intuition .....	27
<b>4. Synthèse concernant l'approche théorique, la problématique et l'opérationnalisation de notre recherche .....</b>	<b>28</b>
<b>II. L'expérience « Devoir sur table ».....</b>	<b>32</b>
<b>1. Définition de l'épreuve « Devoir sur table ».....</b>	<b>35</b>
<b>2. Les énoncés des problèmes .....</b>	<b>37</b>
<b>3. Analyse de la tâche.....</b>	<b>38</b>
A. Les procédures de calcul .....	39
a. Le recours à la règle de la somme .....	39
b. Le recours aux règles du produit et du quotient.....	40
B. Les procédures d'énumération.....	41
a. Les procédures observées par Vergnaud et Cohen (1969).....	41
b. Les procédures observées par Mendelsohn (1981).....	42
c. Les procédures observées par Maury et Fayol (1986).....	44
C. Quelques erreurs attendues.....	44
<b>4. Population et conditions de passation.....</b>	<b>46</b>
<b>III. Réponses à l'épreuve « Devoir sur table » .....</b>	<b>49</b>
<b>1. Quelques remarques à propos des registres sémiotiques utilisés dans les réponses.....</b>	<b>49</b>
A. L'énumération sur liste .....	49
B. L'inventaire sur figure ou tableau .....	53
<b>2. Définition des classes de réponses.....</b>	<b>58</b>
A. Les réponses justes .....	59
a. Procédures associées aux réponses justes .....	59
• L'énumération systématique à élément constant .....	59
• L'énumération systématique associée aux règles du produit et du quotient.....	61
• L'énumération partitive répétée.....	63
• Énumération circulaire complétée d'une énumération systématique.....	65
b. Remarques relatives aux réponses justes .....	68
• Résultats justes, procédure inconnue .....	68
• Procédures pertinentes mais résultats faux.....	70
B. Les réponses intermédiaires supérieures .....	71
a. Énumération d'arrangements .....	71

b. Enumération de combinaisons avec répétitions .....	72
c. Dénombrement d'arrangements avec répétitions .....	74
C. Les réponses intermédiaires inférieures .....	74
a. Enumération systématique limitée au premier objet .....	75
b. Subordination à une structure énumérative locale .....	75
c. Enumérations difficiles à produire et à contrôler .....	77
d. Enumération incomplète par perte du référent .....	78
e. Enumération incomplète d'arrangements .....	79
f. Mise en œuvre des propriétés de la proportionnalité .....	80
g. L'influence de la position des points .....	81
h. Réponses approximatives .....	82
D. Les réponses fausses .....	82
a. Enumération partitive .....	83
b. Enumération circulaire .....	84
c. Autres réponses fausses .....	85
• Autant de possibilités que d'objets .....	86
• Le produit des deux paramètres $n$ et $p$ .....	87
• Le nombre de partages possibles de la collection en deux groupes .....	88
<b>3. Distribution des procédures observées et des performances selon le facteur modèle combinatoire implicite. ....</b>	<b>89</b>
A. Description par classe de réponse .....	96
B. Description par effectif de la collection et selon l'ordre de résolution .....	97
C. Description par modalité du facteur « modèles combinatoires implicites » .....	98
<b>4. Quelques traitements statistiques des données recueillies .....</b>	<b>99</b>
A. Définition d'un barème de notation des réponses .....	100
B. Présentation des résultats .....	108
a. Les différences des performances selon la modalité « ordre de résolution » .....	111
b. Les différences de score entre les différents modèle combinatoire implicite .....	112
<b>5. Distribution de la variable « procédures » selon les modalités du facteur « modèle combinatoire implicite » .....</b>	<b>114</b>
A. Distribution de la variable procédures pour la modalité « association – salutations » .....	116
B. Distribution de la variable procédures pour la modalité « association – segments » .....	118
C. Distribution de la variable procédures pour la modalité Dis .....	123
D. Distribution de la variable procédures pour la modalité Par .....	126
E. Distribution de la variable procédures pour la modalité Sél .....	129
<b>6. Variation des réponses entre les deux problèmes de l'épreuve.....</b>	<b>135</b>
A. Principes de l'analyse .....	137
B. Résultats .....	138
a. Stabilité .....	139
• Effets lié à l'ordre de résolution des problèmes .....	139
• Effets liés à la nature des différents modèles combinatoires implicites. ....	141
b. Régression .....	141
• Effets lié à l'ordre de résolution des problèmes .....	141
• Effets liés à la nature des différents modèles combinatoires implicites. ....	142
c. Progrès .....	142
<b>IV. L'expérience « Atelier de résolution de problèmes ».....</b>	<b>144</b>
<b>1. Présentation de l'expérience .....</b>	<b>144</b>
A. Les apports de l'expérience « Devoir sur table » .....	144
B. Les questions qui se posent encore .....	145
C. Description de l'épreuve .....	147
<b>2. Approche théorique et définition d'une méthodologie pour l'analyse des contenus.</b>	<b>148</b>
A. De l'acte discursif à la conduite interactive .....	151
B. Les découpages séquentiels du corpus .....	154

a. Les problèmes d'homogénéité de séquences .....	154
b. « L'échange » comme séquence circonscrite et homogène .....	155
c. Notion « d'échanges résolutives » .....	158
d. Des séquences dynamiques et fonctionnelles .....	160
• Collaboration acquiesçante, co-construction .....	160
• Conflit socio-cognitif et déstabilisation des représentations .....	165
C. Résumé de notre approche théorique, conséquences méthodologiques et commentaires pratiques .....	169
<b>3. Exemple d'analyse en terme de conduites interactives et d'échanges résolutives ...</b>	<b>174</b>
A. Présentation de l'analyse .....	174
B. L'analyse du protocole 01 .....	178
a. Le tableau de l'analyse .....	178
b. L'analyse des différents épisodes de la négociation .....	193
• L'épisode I : .....	193
• L'épisode II : .....	194
• L'épisode III : .....	196
• L'épisode IV : .....	197
• L'épisode V : .....	198
• L'épisode VI : .....	199
• L'épisode VII : .....	200
• Les épisodes VIII et IX : .....	203
c. Proposition de modélisation pour l'ensemble des réponses relatives à ce protocole .....	203
<b><i>V. Présentation des résultats de l'expérience « Atelier de résolution de problème »</i></b>	<b><i>207</i></b>
<b>1. Significations et modèles de réponse.....</b>	<b>207</b>
A. Significations associées aux procédures pertinentes .....	210
B. Significations associées aux procédures non pertinentes.....	212
C. Vers une modélisation générale.....	214
<b>2. Mise en évidence d'une concurrence entre réponses pour certains élèves .....</b>	<b>218</b>
<b>3. Modèles de réponses et effet de nature sémantique .....</b>	<b>224</b>
A. Effet de nature sémantique et problèmes « association » .....	225
a. Le problème « association – segments » .....	225
b. Le problème « association – salutations » .....	230
B. Effet de nature sémantique et problème « distribution » .....	231
a. L'influence de la représentation figurale de la grille .....	231
b. Règle de la somme ou règle du produit .....	236
C. Effet de nature sémantique pour les problèmes « partition » et « sélection » .....	238
a. Le problème « partition » .....	239
b. Le problème « sélection » .....	243
<b><i>VI. Conclusions.....</i></b>	<b><i>245</i></b>
<b>1. Rappel du projet général de cette recherche.....</b>	<b>245</b>
<b>2. Rappel des expériences mises en oeuvre.....</b>	<b>246</b>
<b>3. Rappel des principaux résultats .....</b>	<b>247</b>
A. Les résultats de l'épreuve « Devoir sur table » .....	247
a. Classification des réponses et procédures associées .....	247
• Les réponses justes .....	247
• Les réponses fausses .....	249
• Réponses intermédiaires .....	249
b. Description des rapports entre procédures et modèles combinatoires implicites .....	249
c. Les effets liés à l'ordre de résolution des problèmes .....	251
B. Les résultats de l'épreuve « Atelier de résolution » .....	252
<b>4. Quelques perspectives de recherche .....</b>	<b>256</b>

<b>Bibliographie.....</b>	<b>258</b>
<b>Liste des tableaux, figures et exemples.....</b>	<b>265</b>
<b>ANNEXES.....</b>	<b>270</b>
<b>Indications aux professeurs ayant fait passer l'épreuve « Devoir sur table ».....</b>	<b>271</b>
<b>Analyses statistiques .....</b>	<b>272</b>
<b>Réponses fausses – autres relevées à l'épreuve « Devoir sur table » .....</b>	<b>278</b>
<b>Modélisations des échanges résolutaires relatifs à chacun des protocoles .....</b>	<b>285</b>
<b>Emergence des procédures pour chaque élève au cours de sa participation à l'atelier de résolution de problème. ....</b>	<b>298</b>



# I. Introduction

## 1. Présentation de la recherche, son objet

S'il est un des problèmes particulièrement importants pour les humains, c'est bien celui de la transmission des savoirs : que deviendrait l'humanité si cette transmission s'arrêtait ? Indépendamment de cette « hypothèse d'école », il s'agit plus concrètement d'assurer pour chaque enfant la possibilité de bénéficier au mieux de son héritage culturel et de se retrouver ainsi muni des mêmes chances pour s'inscrire dans la société à laquelle il appartient. Nombreuses sont les approches de ce problème et les réponses proposées. Nous avons privilégié l'approche psychologique et didactique ce qui veut dire, entre autres choses, que nous considérons comme nécessaire d'articuler au mieux les processus d'enseignement et d'apprentissage en s'appuyant sur une connaissance approfondie de ces derniers. Un certain nombre de réponses ont été apportées sur ce plan-là selon des approches constructivistes, en particulier par les apports de la psychologie cognitive. Maury (2001) questionnant la pertinence des entrées psychologiques en didactique des mathématiques signale que « [...] *l'apport des psychologies cognitives est indiscutable, au moins en ce qu'elles nous éclairent sur les rapports personnels aux savoirs ou sur les conceptions, rapports ou conceptions dont la connaissance est essentielle, en particulier lors de la construction et de l'évaluation des ingénieries didactiques ou de l'élaboration des situations didactiques.* » Et parmi les hypothèses avancées concernant les processus d'apprentissage, une des plus intéressantes consiste à dire que c'est à travers des problèmes à résoudre, des situations pour lesquelles l'individu ne dispose pas de réponses pratiques a priori que les connaissances se construisent, que les concepts prennent du sens. Cette approche pragmatique de la conceptualisation, comme nous le présentons ci-dessous, intègre de façon incontournable à la fois le problème des situations, celui des connaissances disponibles et celui des contenus disciplinaires. Elle participe ainsi, d'une certaine façon, à la constitution des didactiques scientifiques.

C'est dans ce cadre-là que notre travail s'inscrit en s'intéressant à certains effets liés à la sémantique des énoncés de problèmes sur les processus de résolution. Il s'agit

plus précisément d'étudier la manière dont les sujets appréhendent les contenus de certains énoncés de problèmes et comment cette lecture oriente à la fois leurs raisonnements et les procédures qu'ils mettent en œuvre. Pour cela, nous nous intéressons à des problèmes de dénombrement élémentaires et les sujets qui ont participé à nos expérimentations, des élèves de 4<sup>ème</sup> (13 à 14 ans), ont eu pour tâche de dénombrer des combinaisons de 2 objets d'une collection de 4 ou 20 objets. Avant de poursuivre et de détailler quelque peu le cadre théorique auquel nous nous référons, une précision s'impose concernant les limites de notre investigation.

Bien que relevant du domaine de la didactique des mathématiques, notre objet de recherche se focalise plus sur le processus de résolution que sur le processus de conceptualisation ; cela ne veut pas dire que nous les distinguons fondamentalement : résoudre des problèmes de mathématique participe à la conceptualisation des notions auxquelles ces problèmes se réfèrent implicitement. Mais cela est insuffisant et le travail du maître ne se limite pas à proposer des problèmes. Encore faut-il, par exemple, institutionnaliser les connaissances nouvelles qui accompagnent les réponses trouvées et leur donner ainsi un statut d'objet. Ce point important n'est cependant pas au centre de notre travail et, par conséquent, nous n'évaluons pas les « acquis » conceptuels des élèves qui ont participé à notre expérimentation. Ce qui nous préoccupe particulièrement, c'est de rendre compte de la manière dont les contenus de certains énoncés de problèmes (que l'on pourrait éventuellement utiliser à des fins d'apprentissage) peuvent induire des réponses plus ou moins pertinentes, ce qui introduirait des facilités ou des difficultés dans la conceptualisation des notions visées.

## **2. Approches théoriques**

Notre approche relève d'une sémantique cognitive dans le sens où elle s'intéresse principalement aux rapports entre la pensée du sujet qui cherche la solution d'un problème et le contenu de l'énoncé. Nous considérons, en effet, que ces rapports s'analysent en terme de significations que le sujet élabore au cours de son activité de résolution. En considérant de cette façon la signification comme une activité mentale, nous acceptons l'hypothèse de l'existence de certains processus psychologiques que l'on désigne sous le terme général de représentation. Il est donc important de définir à présent les liens que cette notion entretient avec les processus de résolution de problème

ainsi que les conséquences que nous en tirons pour notre recherche. Nous faisons ainsi référence aux approches de la psychologie cognitive qui détaillent les différents mécanismes participant à la recherche de la solution.

Voici ce qu'en rapporte Weil-Barais (2005, p. 570) à propos du courant du traitement de l'information : « *Malgré les difficultés rencontrées, ce courant a développé un ensemble de concepts permettant de rendre compte des processus de résolution :*

- *l'élaboration de la représentation du problème, c'est-à-dire l'interprétation effectuée par le sujet des données initiales, des données à chercher, du but à atteindre et des contraintes ;*

- *les traitements effectués par le sujet sur les données ou sur les représentations (les identifications, les classifications, les inférences, les calculs en tout genre, les traductions, les transformations...) ;*

- *les contrôles exercés et les décisions prises. »*

Cette description donne à l'interprétation des données initiales une place importante dans l'élaboration de la réponse. Et cela concerne surtout les situations que l'on qualifie de « sémantiquement riches » dans le sens où la construction de la signification (autrement dit la représentation du problème) reste primordiale.

Julo (1995) propose des apports intéressants concernant cette question. Cet auteur étudie les interactions entre les processus en jeu et les caractéristiques des situations de référence dans une problématique de l'aide à la résolution de problème. Il décrit les processus en jeu en terme d'interprétation, de sélection, de structuration de la représentation du problème et d'opérationnalisation. Dans cette approche, Julo (ibid., p. 34) précise que l'interprétation du problème n'est pas indépendante de ce qu'on appelle le contexte sémantique : « [...] *l'énoncé du problème doit être vu comme un texte à part entière sa compréhension impliquant, comme pour tout texte, la prise en compte d'un ensemble très vaste d'éléments de nature différente que nous avons convenu d'appeler, ici, le contexte sémantique.* » (ibid. p. 38). Or, cet auteur montre que le contexte sémantique n'est pas transparent et que le sujet doit opérer une sélection parmi toutes les données du problème ; il ne retient ainsi que celles qu'il juge essentielles pour élaborer la solution. Julo ajoute que cette sélection est le fait des connaissances disponibles chez le sujet. La signification élaborée serait ainsi au centre d'une dialectique entre le contexte

sémantique et certaines connaissances qui permettent d'opérer une sélection parmi les données de l'énoncé et de produire une réponse appropriée. Cette position théorique appelle trois remarques : la première concerne la nature des connaissances qui déterminent à la fois l'interprétation des énoncés et les opérations à mettre en œuvre pour résoudre le problème ; la deuxième concerne les contenus mathématiques en jeu , dimension à laquelle Julo ne fait pas référence, enfin, la troisième concerne les conséquences méthodologiques au niveau de l'analyse du corpus recueilli et de son interprétation.

### • *La question des connaissances*

Au niveau de la nature des connaissances en jeu, Julo (ibi.) n'apporte pas de réponse directe. Il se contente de dire (ibid., p. 50) que ces connaissances sont de nature opératoires en permettant le passage à l'action et participe donc à l'opérationnalisation de la représentation par la mise en œuvre d'heuristiques, de stratégies, de procédures ou d'algorithmes. Mais, il signale également (ibid. p. 54) qu'il n'y a pas vraiment de réponse sur la manière dont une représentation du problème s'opérationnalise. La question des relations entre la représentation et l'action par l'intermédiaire de connaissances spécifique est prise en charge dans d'autres approches comme celle de Gérard Vergnaud avec des notions comme celles d'invariants opératoires et de connaissances en acte.

Avant de poursuivre ces explications, il semble important de faire une remarque sur les problèmes de compatibilité entre approches théoriques. En effet, si Julo se réfère au cadre théorique de l'ergonomie cognitive et celui de la résolution de problème, Vergnaud s'inscrit, lui, d'une certaine façon dans l'héritage piagétien en accordant à la connaissance une fonction adaptative. Toutefois, il s'en démarque en prenant en compte, d'une part, la nature des concepts mathématique pour expliquer le fonctionnement du sujet et, d'autre part, l'importance des signifiants dans la conceptualisation. Nous sommes conscients qu'il est difficile de se référer à des courants théoriques différents même s'ils appartiennent tous à l'approche cognitive. Cependant, dans la mesure où ces courants proposent des réponses à certaines questions que nous nous posons, il semble raisonnable de s'y intéresser même de façon circonscrite et avec les précautions nécessaires. Maury (2001) signale à cet égard : « [...] *le fonctionnement cognitif est complexe et que même en se limitant aux questions concernant l'apprentissage de savoirs mathématiques, nous sommes loin de disposer d'un modèle satisfaisant*

*[...] cette diversité [de cadres théoriques] constitue en fait une aide pour l'analyse et l'interprétation de résultats expérimentaux, souvent complexe* ». Ainsi selon les questions qui se posent, le recours justifié à un cadre théorique spécifique peut s'avérer pertinent. Le modèle que propose Julo nous permet de situer la question de la sémantique dans les processus de résolution, en soulignant l'importance du processus d'interprétation et ses rapports avec le contexte sémantique. Vergnaud, quant à lui, apporte des réponses sur les relations entre le fonctionnement cognitif des sujets et ses connaissances opératoires.

A ce sujet, Vergnaud explique qu'un grand nombre de connaissances sont déterminées par l'expérience acquise dans des situations pour lesquelles elles ont été élaborées afin de répondre à des problèmes effectifs. Cet auteur parle ainsi « d'élaboration pragmatique » (Vergnaud, 1990) des concepts. Il signale à ce propos : « *[...] si l'on veut prendre correctement la mesure de la fonction adaptative de la connaissance, on doit accorder une place centrale aux formes qu'elle prend dans l'action du sujet. La connaissance rationnelle est opératoire ou n'est pas.* » (ibid.). Les connaissances construites en situation par les sujets sont donc nécessairement associées à des règles d'action. Ces règles leur permettent d'interpréter les situations en termes d'actions possibles ce qui leur donne toute leur effectivité. Nous faisons ainsi référence à la notion d'invariants opératoires : « *Cette conception [cognitivist] donne une place fondamentale aux concepts d'invariants opératoires et de règles d'action. C'est que ceux-ci se trouvent à la charnière des rapports entre le réel et la connaissance pratique et théorique que le sujet s'en forme [...]* » (Vergnaud, 1987, p. 821). Signalons que Julo reconnaît que les connaissances opératoires (terme qu'il utilise dans son approche) qui participent à l'interprétation du contexte sémantique et à l'opérationnalisation de la réponse sont issues de l'expérience passée (ibid., p. 50).

#### **• La question des contenus mathématiques**

La notion piagétienne d'invariant opératoire permet de rendre compte de la question des relations entre connaissances et action. L'aménagement opéré par Vergnaud à propos de cette notion consiste à la relier aux contenus mathématiques plutôt qu'aux structures logico-mathématiques. Moins structuraliste, Vergnaud s'intéresse ainsi au fonctionnement des sujets dans certaines situations dont la maîtrise relève en particulier

de concepts mathématiques. Cette prise en compte à la fois de la dimension disciplinaire et de l'activité des sujets est décrite dans le cadre cognitiviste de sa théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990).

Cette notion de « champs conceptuels » revoie à un ensemble de situations définies en terme de tâche à maîtriser à l'aide d'un certain nombre d'opérations et de concepts – les concepts permettant de maîtriser les situations, les situations donnant du sens à ces concepts. Vergnaud présente un des intérêts de la notion de champ conceptuel en ces termes : « [...] *toute situation complexe peut être analysée comme une combinaison de tâches dont il est important de connaître la nature et les difficultés propres.* » (ibid.) Il semble donc tout à fait justifié de réaliser notre recherche en terme de tâches afin d'en connaître « la nature et les difficultés propres ». Cette position pose la question des conséquences méthodologiques de notre travail.

#### **• Les conséquences méthodologiques**

Les approches cognitivistes et pragmatiques de la conceptualisation et de la résolution de problème incitent donc à prendre en compte les réponses produites pour les expliquer à partir à la fois des éléments du contexte sémantique, des connaissances disponibles et des notions et opérations mathématiques en jeu. Les conséquences méthodologiques de cette position théorique consistent à s'appuyer sur une analyse du corpus en terme de procédures, de traces écrites et de justifications. L'observation de régularités dans l'ensemble des réponses, tant au niveau procédural qu'au niveau des justifications, autorise un certain nombre d'inférences relatives aux significations que les élèves ont élaborées pour interpréter les différents contextes sémantiques. C'est sur cette approche fonctionnaliste que nous nous appuyons pour analyser l'ensemble des réponses que nous recueillons et pour leur donner du sens.

Sous cet aspect, notre travail est donc proche d'une expérience réalisée par Maury et Fayol (1986). Cette recherche s'intéresse aux procédures que des élèves de 9 et 10 ans mettent spontanément en œuvre pour résoudre des problèmes de combinatoire sur du matériel réel (des piles et des ampoules ; des circuits électriques). La tâche demandée consiste à énumérer de manière exhaustive et sans répétition les éléments d'un produit cartésien en fonction de trois variables : la nature des objets (autrement dit, le contexte sémantique), l'âge des élèves et la modalité de travail impliquant ou non l'interaction

entre élèves. La question centrale de cette recherche concerne la généralisation du schème lié à l'activité observée. Cette question renvoie aux phénomènes de « décalages » et l'hypothèse faite à ce sujet consiste à considérer la nature sémantique des situations comme déterminante dans l'organisation de la procédure. Par conséquent, l'analyse procédurale permet de rendre compte du rôle joué par la situation à travers les significations que les élèves lui confèrent.

### **3. Présentation de quelques références qui fondent cette recherche**

Nous cherchons donc à appréhender les effets liés aux contenus des énoncés sur les processus de résolution de problèmes dans des situations de dénombrements élémentaires. Par conséquent, il faut nécessairement que ces situations se distinguent au niveau du contexte sémantique tout en se référant aux mêmes opérations mathématiques. D'une part, au niveau des opérations, nous avons choisi celles qui permettent de dénombrer des combinaisons – nous justifierons ce choix en temps voulu. D'autre part, le jeu sur les contenus des énoncés se fait à partir de la notion de « modèles combinatoires implicites » que nous devons à Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (1997). Cette notion permet de définir un ensemble de problèmes qui renvoient aux mêmes opérations combinatoires et dont nous pouvons comparer les réponses produites. Cette notion est importante dans notre travail et mérite quelques explications.

#### **A. Les modèles combinatoires implicites**

Dans une recherche portant sur la résolution de problème de dénombrements élémentaires au collège, Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (ibid.) opérationnalisent cette variable de situation, les « modèles combinatoires implicites », décrite d'un point de vue théorique par Dubois (1984) sans jamais avoir fait l'objet d'une vérification expérimentale. Nous présentons tout d'abord les réflexions de cet auteur.

##### **• Dubois (1984)**

Dans le projet de permettre un enseignement plus rationnel de certains éléments de la combinatoire énumérative, Dubois propose une classification des différents types

de configurations combinatoires. Il définit ainsi les « rangements », les « sélections », les « séparations en tas » et les « partages d'entiers ». Les rangements peuvent être formalisés en terme mathématique d'application. Ainsi, ils peuvent être « injectifs » (au plus un objet par case), « surjectifs » (au moins un objet par case) ou « bijectifs » (un objet et un seul par case). Les sélections sont associées au concept d'échantillonnage. Les séparations en tas et les partages d'entiers renvoient à la notion mathématique de partition.

Pour Dubois (ibid.), il s'agit d'un effort de rationalisation dont le but est de favoriser la compréhension des dénombrements élémentaires. Il établit donc ce qu'il appelle « une systématique des configurations combinatoires » en articulant ces différentes classes de configurations à partir de celle des rangements. L'articulation des rangements avec les « sélections » se fait de la manière suivante : les rangements de  $p$  objets numérotés dans  $n$  cases distinctes correspondent à des sélections ordonnées, avec répétition de  $p$  objets (les cases) parmi  $n$ , soit des arrangements  $p$  à  $p$  de  $n$  objets. De même, aux rangements d'objets indiscernables dans des cases distinctes, correspond les sélection non ordonnées ou combinaisons de  $p$  objets pris parmi  $n$ . L'articulation des « distributions » avec les « séparations en tas » se fait en vidant dans l'ordre les  $n$  cases des objets qu'elles contenaient. On constitue ainsi une séparation d'objets distincts en tas ordonnés. Enfin, on peut mettre en correspondance les rangements de  $p$  objets dans  $n$  cases avec les partages de l'entier  $p$  en  $n$  « sommants » en prenant pour chacun d'eux le nombre d'objets par case qui lui correspond. Il est possible de détailler cette analyse relativement complexe selon des caractéristiques d'ordre et de distinction des objets. Une telle description aussi détaillée n'est pas nécessaire dans le cadre de notre travail. Nous retiendrons cependant deux choses.

D'abord, ces différentes configurations combinatoires peuvent être classées en trois modèles combinatoires implicites que Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (1997) opérationnalisent dans leur recherche (à l'exception du partage d'entiers) sous les termes de « selection », « distribution » et « partition »<sup>1</sup>. Ainsi, dans le modèle des sélections, un échantillon de  $p$  objets est tiré d'une collection de  $n$  objets ; dans le modèle des distributions,  $p$  objets sont placés dans  $n$  endroits différents ; dans le modèle des parti-

---

<sup>1</sup> Dans le cadre de notre recherche, et pour plus de commodité, nous reprenons ces termes en français : distribution, sélection et partition.



tion, une collection de  $n$  objets est partagée en groupes de  $p$ . Remarquons que ces auteurs n'introduisent pas les « partages d'entiers » de Dubois dans les modèles combinatoires implicites ce qui se conçoit puisqu'il s'agit d'un cas particulier de partition comme la « séparation en tas ».

Ensuite, il est possible de transférer par le biais de ces mises en correspondances les opérations relatives au modèle des sélections (arrangements, permutations et combinaisons) à celui des rangements et des partitions et donc de proposer une série de problèmes différents du point de vue du contexte sémantique. De telles particularités contextuelles posent la question des possibilités cognitives d'opérer ce transfert d'opérations entre situations ne relevant pas, par hypothèse, de la même sémantique.

La psychologie cognitive propose deux modèles de résolution de problème qui peuvent prendre en charge cette question de transfert sémantique (cf. Richard, 1990, p. 81 et 82). Le premier fait référence à l'assimilation du problème à un problème dont la solution est déjà connue, assimilation liée à la reconnaissance d'analogies entre eux. Le second fait l'hypothèse de l'utilisation d'un schéma de problème. Dans ce cas, l'interprétation consiste à remplir les variables du schéma par les données correspondantes de la situation. Il est évident que ces hypothèses décrivent des processus qui interviennent quand les sujets ont déjà élaboré des procédures de résolution (celles du problème analogue ou celles qui s'associent au schéma de problème). La question qui se pose alors concerne les cas où les individus ne disposent pas de telles ressources. Rien n'interdit d'envisager dans ce cas la possibilité de modifications cognitives. Ces modifications peuvent faciliter le transfert analogique dans le premier cas et, pour le second, elles peuvent favoriser certaines adaptations à se faire dans la composition des schémas de problème. Cette analyse semble proche de celle de Vergnaud (1990) quand il décrit la conduite des sujets en résolution de problèmes en terme de schèmes : « [...] *l'observation des élèves en situation de résolution de problème, l'analyse de leurs hésitations et de leurs erreurs, montrent que les conduites en situation ouverte sont également structurées par des schèmes. Ceux-ci sont empruntés au vaste répertoire des schèmes disponibles, et notamment à ceux qui sont associés aux classes de situations qui paraissent avoir une parenté avec la situation actuellement traitée. Simplement, comme la parenté n'est que partielle et éventuellement illusoire, les schèmes sont seulement esquissés, et les tentatives souvent interrompues avant d'avoir été menées à leur*

terme ; plusieurs schèmes peuvent être évoqués successivement et même simultanément dans une situation nouvelle pour le sujet (ou considérée par lui comme nouvelle). Les schèmes sont donc décrits de cette façon comme des entités qui organisent la conduite de l'individu en situation et comme les situations peuvent varier indéfiniment, il est n'est pas possible de concevoir ces entités mentales dans une rigidité définitive. Le recours à l'idée de schème dans les processus de résolution de problème renvoie à la question des connaissances opératoires que nous avons évoquées ci-dessus. Il ne s'agit plus, à présent, de justifier les relations entre, d'une part, les connaissances opératoires disponibles et, d'autre part, les interprétations et les opérationnalisations ; il s'agit de rendre compte de la façon dont ces connaissances opératoires peuvent évoluer du fait d'un transfert sémantique.

Cette question peut certainement se poser pour des sujets ayant reçu un enseignement en matière de dénombrement élémentaire traditionnellement introduit avec la notion d'échantillonnage. Mais rien n'interdit de penser que, dans le cas contraire, les élèves ne puissent mobiliser un certain nombre de ressources cognitives (qu'on les appelle schéma ou schèmes, etc.) et que, par des processus de transferts sémantiques partiels, ces entités s'accommodent, se transforment, se complexifient pour élaborer ainsi une nouvelle entité cognitive de traitement associée à cette nouvelle situation. Dans tous les cas, il semble nécessaire de voir comment les problèmes relevant de chacun des trois modèles combinatoires implicites se distinguent au niveau des difficultés de résolution, mais aussi au niveau des procédures mises en oeuvre. Plus précisément il s'agit de découvrir ce qui, dans les caractéristiques contextuelles de ces problèmes, induirait chez les sujets des significations qui peuvent faire obstacle à ces transferts sémantiques.

- *Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (1997)*

Pour leur recherche, Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (ibid.) croisent donc les facteurs suivants : les modèles combinatoires implicites (partition, distribution et sélection), le type d'opération combinatoire (arrangements, permutations et sélection) et la nature des éléments en jeu dans les énoncés (objets, personnes, numéros et lettres). Remarquons que cet ensemble de problèmes, qui relève des mêmes concepts mathématiques, permet de définir un champ conceptuel dans le domaine des dénombrements combinatoire (cf. ci-dessus).

Pour leur expérience, Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (ibid.) ont donc fait résoudre l'ensemble des problèmes à 720 élèves de 14 à 15 ans parmi lesquels 325 ont reçu un enseignement en matière de combinatoire (savoir identifier l'opération combinatoire attendue selon les caractéristiques de la situation).

Dans l'ensemble, les résultats montrent que les élèves ont eu beaucoup de difficultés à résoudre ces problèmes. Les données recueillies ont fait l'objet d'une analyse de la variance qui montre une interaction significative entre les modèles combinatoires implicites et les opérations combinatoires. Ainsi, la hiérarchie des difficultés entre les modèles implicites n'est pas la même selon les opérations combinatoires en jeu : pour le groupe d'élèves avec enseignement, les problèmes de sélection présentent de meilleures réponses avec les arrangements et les permutations ce qui n'est pas le cas pour les problèmes de distributions et de partitions. D'autre part, bien que les élèves qui ont reçu un enseignement mettent généralement en œuvre les formules apprises, beaucoup d'entre eux produisent une énumération avec les problèmes de distribution et de partition. Pour le groupe sans enseignement, on n'observe pas de différences significatives entre les trois modèles combinatoires implicites.

Batanero, Godino et Navarro-Pelayo expliquent ces résultats en se référant à l'enseignement de la combinatoire. Ce contenu disciplinaire est effectivement introduit à l'école à partir de la notion d'échantillonnage, donc du modèle de la sélection. Des entretiens cliniques confirment cette explication : les élèves ne sont pas capables de traduire en terme de sélection ce qui relève de la partition ou de la distribution bien que le transfert sémantique soit théoriquement possible, comme nous l'avons vu ci-dessus. Cependant, ce transfert demande une bonne maîtrise des situations initiales (ici, celles qui relèvent de la sélection) et rien ne permet de penser que les élèves ayant eu un enseignement en aient assimilé le contenu. Julo (ibid. p. 57) signale qu'il ne suffit pas d'avoir appris les formules mais qu'il faut surtout les avoir acquises comme des « outils de modélisation ». Il fait ainsi référence à l'utilisation de connaissances mathématiques pour modéliser la situation et la traiter. Cette notion introduit inévitablement la question des systèmes de signes qui participent à la modélisation.

En singularisant la situation sous une forme mathématique ou graphique, le recours à de tels outils participe d'une certaine façon à l'interprétation de la situation, au

choix des données pertinentes, à la structuration de la représentation du problème et à son opérationnalisation. La notion d'outils de modélisation est donc importante pour rendre compte d'une partie du travail produit par les élèves en résolution de problème. Nous retiendrons que le recours effectif à un outil de modélisation concerne essentiellement les moments où l'activité de l'élève est centrée sur la modélisation de la situation ce qui s'oppose à la simple application d'une formule de façon plus ou moins pertinente. Nous reviendrons sur ce point ci-dessous.

Les modèles combinatoires implicites, en constituant des problèmes de difficultés différentes, peuvent donc être considérés d'une certaine façon comme les modalités d'une variable didactique. D'autre part, les apprentissages relatifs aux dénombrements élémentaires doivent intégrer le problème de généralisation de compétences du modèle de sélection aux autres ce qui nous renvoie à la question du transfert sémantique. Cette proposition didactique renvoie à la question de la généralisation et interroge les mécanismes qui permettent à ce transfert d'opérer. Par conséquent, il semble indispensable de rendre compte des obstacles possibles que cette généralisation peut rencontrer. Or, le travail de Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (ibid.) porte essentiellement sur les performances ce qui a le mérite de rendre évidents certaines différences dans les réussites entre les problèmes. Cependant, cette recherche ne répond pas à la question concernant la manière dont les caractéristiques des différents modèles combinatoires implicites jouent dans les significations produites par les élèves pour résoudre ces problèmes, question qui implique une analyse procédurale des réponses.

## **B. Sujet « modélisant » et sujet « producteur de modèles »**

Une autre recherche, celle de Roa (2000), analyse de façon plus approfondie les effets liés aux différents modèles combinatoires implicites en se centrant sur les rapports entre le raisonnement des élèves, les systèmes sémiotiques qui le véhiculent et les situations de référence qui le contextualisent. La prise en compte de ces trois dimensions (cognitive, sémiotique et empirique) n'est pas nouvelle en didactique des disciplines scientifiques. On la retrouve, par exemple dans la théorie des champs conceptuelles de Vergnaud (1990) pour qui un concept doit être défini à la fois par l'ensemble des situations qui lui donne du sens, l'ensemble des invariants opératoires sur lesquels reposent son opérationnalité et l'ensemble des formes qui permettent de le représenter symboli-

quement. On la retrouve encore en didactique de la physique comme chez Lemeignant et Weil-Barais (1993) pour qui l'évolution des conceptions progresse selon trois registres articulés entre eux : celui de l'expérience pratique et des interrogations qu'il suscite, celui des représentations mentales et celui des représentations symboliques.

Cependant, Roa se situe dans un autre cadre explicatif. Son travail se réfère à une approche théorique introduite par Godino et Batanero (1994, 1998), et développée par Godino (2002) et Godino, Batanero et Roa (2005). Dans cette approche qualifiée de « sémiotique et ontologique » par ses auteurs, les différents niveaux de connaissances mathématiques (connaissances procédurales, conceptuelles, langagières, argumentatives et relatives aux problèmes de référence) sont analysés en terme de significations définies ici comme des mises en relation, par un individu ou une institution, entre certaines expressions et certains contenus selon un codage plus ou moins explicite. Ces significations renvoient donc, dans ce modèle, à des systèmes de pratiques discursives et opératoires attribués à un individu ou à une institution et associés à certains types de problèmes.

Dans le cadre de sa recherche, Roa (ibid.) présente de ce fait une analyse a priori qui intègre à la fois des significations institutionnelles et des raisonnements possibles relatifs aux problèmes de Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (1997). Cette analyse définit ainsi deux modalités possibles de raisonnement combinatoire. Dans le premier, Roa décrit un sujet théorique « modélisant » qui connaîtrait les conditions d'application des formules enseignées : il analyserait les caractéristiques d'ordre et de répétition de la situation et identifie les paramètres ce qui lui permettrait de déterminer les opérations combinatoires attendues. Dans le second, Roa définit un sujet théorique « producteur de modèle » qui identifierait les configurations combinatoires en introduisant un mode de représentation adéquat. Ce sujet est décrit par cet auteur comme un individu qui décomposerait le problème en parties significatives, qui énumérerait de façon systématique et complète les configurations en cherchant une structure récursive. Finalement, ce sujet appliquerait certaines règles définies par les propriétés de la situation respectant leurs conditions d'utilisation. Dans un deuxième temps, Roa met en œuvre une épreuve de résolution de problèmes introduisant la variable relative aux modèles combinatoires implicites de Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (ibid.). Cette épreuve a été passée par 91 étudiants en cinquième année de faculté de mathématique. Il s'agit donc d'une popu-

lation présumée connaître le domaine des dénombrements combinatoires. En l'occurrence, les pratiques individuelles devraient correspondre d'une certaine façon aux pratiques institutionnelles en la matière. Cette épreuve est complétée par des entretiens cliniques avec quatre étudiants sélectionnés pour les réponses qu'ils ont produites (2 « modélisants » qui ont réussi à l'épreuve et deux « producteurs de modèle » qui ont échoué). D'une part, ces entretiens ont pour objectif de produire une analyse des raisonnements des sujets en terme de significations personnelles. D'autre part, ils ont permis à Roa de proposer des explications concernant le niveau de difficulté des problèmes posés. A ce propos, il a été observé que les sujets « producteurs de modèle », qui n'utilisent donc pas les formules, présentent un défaut de maîtrise des composantes pragmatiques que sont la récursivité et l'énumération systématique tandis que les sujets « modélisants » oublient, selon cet auteur, les conditions d'application des formules. Du point de vue de Julo (1995) qui se situe dans un autre cadre théorique, on peut dire qu'ils n'ont donc pas intégrés les « outils de modélisation » de la discipline ce qui renvoie au problème de la maîtrise de ces outils. Une remarque s'impose à ce propos. La notion de signification est définie dans la recherche de Roa en termes de pratiques relatives à différents niveaux de connaissances mathématiques. Cette définition se distingue nettement de celle que nous utilisons dans le sens où elle ne se réfère pas directement à l'activité mentale du sujet qui élabore activement sa réponse (interprétation du contexte sémantique du problème à partir de ses connaissances opératoires, opérationnalisation de la représentation du problème ainsi structuré). Cette position qui est centrée sur l'articulation entre les rapports institutionnels et personnels aux savoirs et aux pratiques, s'inscrit plutôt dans l'approche anthropologique. Dans ce cadre théorique, le rapport d'un individu à un objet particulier (un savoir) relève d'un assujettissement de l'individu au rapport qu'une institution donnée établit avec cet objet (cf. Chevallard, 1992 et 2003). Dans cette perspective il ne semble pas possible de rendre compte de tous les processus qui facilitent ou freinent l'assujettissement dont il est question et qui détermine donc un « bon » ou un « mauvais » sujet de l'institution donnée. Or nous pensons que ce point est important puisqu'il permet de comprendre le fonctionnement des situations que l'on peut mettre en place pour permettre à un certain nombre d'élèves d'entrer dans l'apprentissage des contenus liés aux dénombrements élémentaires.

En privilégiant une approche psychologique et non anthropologique comme le fait Roa (ibid.), nous nous situons plutôt du côté du modèle didactique des « conceptions » ce qui nous permet d'appréhender de façon assez directe la conduite de l'élève qui résout un problème, comme le signalent Maury et Caillot (2003, p. 14). Les modèles psychologiques permettent, en effet, de rendre compte des relations de nature sémantique entre certaines conduites observées (gestes, verbalisations, productions écrites, recours à des outils de modélisation, etc.) et les situations qui les induisent et qui sont présentées sous formes d'énoncés de problème. Dans ce cadre-là, la question de l'intégration de l'outil de modélisation dans la représentation du problème semble importantes comme le montrent certains travaux de Fischbein et collaborateurs (1970, 1975, 1988 et 1997) point que nous présentons à présent.

## **C. Les outils de modélisation et la dimension sémiotique de la résolution de problème**

### **a. Un exemple : l'introduction du schéma en arbre**

Fischbein, Pampu et Minzat (1970) réagissent aux travaux de Piaget et Inhelder (1951) sur la genèse du raisonnement combinatoire. Paradoxalement, quelques sujets seulement au stade des opérations formelles découvrent spontanément des procédures combinatoires alors que, dans le structuralisme piagétien, les opérations combinatoires participent à la pensée hypothético-déductive qui caractérise ce stade (après 11 ou 12 ans). Muni de ces opérations le sujet devrait être capable de combiner les idées, les objets, les propositions ; il raisonnerait alors non plus sur les aspects concrets de la réalité mais en fonction d'un nombre quelconque de combinaisons possibles. Cependant, la théorie des stades ne rend pas compte du phénomène des décalages comme le rappelle Weil-Barais (2005, p. 45) : « *[le structuralisme piagétien] ne permet pas de comprendre les différences de conduites constatées dans des tâches supposées cependant relever d'une même structure (ce qu'en terme piagétien on entend par « décalage »).* »

Fischbein et al. (ibid.) font l'hypothèse que les opérations combinatoires sont toujours en construction au stade de la pensée formelle et qu'il est possible d'accélérer cette construction par un apprentissage systématique qui s'appuie sur la structure du diagramme en arbre. L'utilisation de cette structure donne au concept une signification

intuitive. Dans une première expérience, ils demandent à des enfants de 10 à 15 ans d'estimer le nombre de permutations de 3 à 5 objets. En général, les sujets sous estiment le résultat mais leur estimation s'améliore avec l'âge. Dans une deuxième expérience, concernant les permutations et les arrangements avec répétition de 2 objets dans un groupe de 3 ou 4 objets discernables (des lettres), les sujets sont placés dans des situations « d'apprentissage par la découverte » des techniques d'énumération par le biais d'un schéma en arbre. Dans un premier temps, ils devaient résoudre des problèmes simples pour découvrir et expérimenter le fonctionnement des diagrammes en arbre. Dans un deuxième temps, ils devaient résoudre des problèmes en transférant et en généralisant les acquis cognitifs précédents.

Dans l'ensemble, les résultats sont peu probants malgré une amélioration avec l'âge. Ces auteurs pensent qu'il est encore nécessaire d'approfondir les connaissances relatives au raisonnement combinatoire. Une explication possible de cet échec concerne la faiblesse du dispositif didactique au niveau de son effectivité. D'autre part, ce travail ne porte ni sur les arrangements sans répétitions, ni sur les combinaisons. Il ne tient pas compte non plus de la nature des objets en jeu (chiffres, couleurs et personnes). Fischbein et Gazit (1988) reprennent cette étude et la complètent en y introduisant ces facteurs. Leur objectif est de trouver l'âge optimal pour enseigner l'analyse combinatoire mais aussi de chercher les meilleurs moyens didactiques pour y parvenir. A ce sujet, le dispositif se trouve renforcé puisque l'apprentissage est organisée en trois étapes : les élèves travaillent sur le problème posé en manipulant des objets concrets, puis ils reçoivent une initiation à l'utilisation du diagramme en arbre qu'ils utilisent pour résoudre les problèmes. Enfin, ils sont conduits à déduire une formule générale à partir de la structure des diagrammes en arbre.

Les résultats montrent un effet positif des facteurs âge et apprentissage. Ainsi, les sujets ont principalement eu recours aux formules pour les permutations et les arrangements et aux énumérations pour les combinaisons. Ces dernières présentent tout de même une stabilisation des résultats justes de l'ordre de 40 %. Deux remarques complètent ces résultats. D'abord, dans les cas d'énumérations, le diagramme en arbre a été très peu utilisé. Ensuite, dans l'utilisation des formules, les sujets ont présenté certaines difficultés à prendre en compte le caractère ordonné ou non des situations. Il est possible



que la nature même du diagramme en arbre qui ne permet d'énumérer que des groupes ordonnés soit en partie la cause de ces deux observations.

L'effet positif du facteur apprentissage permet de penser qu'il était intéressant d'intégrer dans ce dispositif didactique le recours successif à deux systèmes de signifiants de nature différente (le schéma en arbre et la formule) : ainsi, une « manipulation symbolique » (l'utilisation de l'arbre) se substitue à une manipulation d'objets concrets, les deux activités renvoyant aux mêmes opérations mentales, celles qui permettent la maîtrise de la situation. Puis cette opération est explicitée sous forme de formule qui permet de substituer, à son tour, le calcul à la manipulation. La formule élaborée de cette façon par les individus présente pour ces derniers les caractéristiques d'un outil de modélisation au sens de Julo (1995, cf. ci-dessus) : elle devient effective pour interpréter et traiter les situations qui lui correspondent. Il ne s'agit donc pas d'une expression mathématique vide de sens.

Enfin, au niveau du facteur relatif à la nature des objets, les résultats sont meilleurs avec les chiffres qu'avec les couleurs ou les personnes. Ce résultat concorde avec ceux de Mendelsohn (1981) dans une recherche sur les procédures de dénombrement des permutations. Dans le cadre d'une analyse procédurale, cet auteur fait l'hypothèse que, dans le cas d'objets relevant d'une structure ordonnée comme les lettres ou les chiffres, les individus ont recours à des procédures plus économiques à organiser et donc font moins appel à la mémoire : *« Tout se passe comme si les sujets [...] qui manipulent des chiffres, n'ont pas à ordonner les éléments qu'on leur propose du fait que la structure du contenu est déjà mémorisée. Ils mettent en œuvre alors des algorithmes qui s'intéressent aux positions relatives des éléments à l'intérieur d'un même terme. Par contre, les sujets [...] qui travaillent avec des jetons, contenu dont la structure est à mémoriser, se préoccupent en premier lieu d'ordonner les éléments pour utiliser ensuite ce système de repérage. Ils construisent donc un algorithme qui donne une place particulière (la première en général) un rôle 'd'ordonnateur'. »*

Précisons que Mendelsohn distingue l'analyse structurale des conduites de l'analyse procédurale. En introduisant cette dernière dans son expérimentation, il cherche à rendre compte des diverses modalités de fonctionnement des structures cognitives selon les situations. Cette approche lui permet d'expliquer les phénomènes de « déca-

lage » à partir d'hypothèses liées à des problèmes d'économie cognitive : *« Tant que le problème est nouveau ou qu'il n'est à résoudre qu'une fois en passant, les sujets utilisent un ensemble de procédures variées qui ne sont pas équivalentes sur le plan fonctionnel, et de ce fait détermine les décalages. »*

*La signification que le sujet attribue aux objets interfèrent directement avec les procédures que le sujet utilise et ceci d'autant plus que pour lui le problème est nouveau et qu'il ne peut pas faire preuve d'économie dans le choix de sa stratégie. »*

### **b. Quelques réflexions théoriques concernant la dimension sémiotique en mathématiques**

Les travaux que nous venons d'évoquer montrent non seulement l'importance du recours à des outils de modélisation (le schéma en arbre et la formule, dans ce cadre-là) dans les processus de résolution de problème mais surtout la manière dont cet outil est intégré dans les connaissances des élèves : pour la deuxième expérience, le processus didactique était plus conséquent que pour la première en faisant intervenir des manipulations, des symbolisations et des généralisations. Cet apprentissage a certainement permis à certains élèves d'utiliser le schéma en arbre comme un véritable outil de résolution. Ainsi, dans le cas de formules comme celles qui permettent de résoudre des problèmes de dénombrement élémentaires, les élèves peuvent les utiliser soit comme des outils de modélisations soit comme des expressions sans signification opératoires. Ce problème est évoqué aussi par Janvier (1993, p. 79) dans le domaine de la physique avec ces propos : *« [...] les élèves appliquent des formules sans signification pour eux car l'enseignement qu'ils ont reçu les a habitués à considérer les représentations symboliques mathématiques comme des procédures à appliquer pour trouver des réponses plutôt que comme des manières diverses de décrire les relations entre les grandeurs relatives au phénomène analysé. »*

Comme nous l'avons évoqué ci-dessus, l'élève peut très bien mettre le problème sous une forme mathématique (en l'occurrence avec un schéma en arbre ou selon une formule particulière) et ne pas l'avoir modélisé pour autant. Par conséquent, Julo (1995) signale : *« [...] ce lien entre l'outil mis en œuvre et l'opérationnalisation de la représentation dépend des connaissances que l'élève est capable de mobiliser avec l'outil : si ces connaissances sont suffisamment précises et solides, elles permettront une opéra-*

*tionnalisation plus efficace de la représentation que dans le cas contraire. » (ibid., p. 83).*

L'idée d'outils de modélisation renvoie à la dimension sémiotique de la conceptualisation et de la résolution de problèmes. Nous entendons par là la nécessité de recourir à un système de signifiants pour accompagner les processus cognitifs et les opérations de pensée. Par exemple, dans son approche pragmatique de la conceptualisation, Vergnaud (1990) définit le rapport de la connaissance à la réalité dans un ensemble qui intègre non seulement des situations de références décrites en terme de tâches, des invariants opératoires définis en tant que connaissances-en-acte, des règles d'action mais aussi des systèmes de signifiant.

D'autres auteurs<sup>2</sup> soulignent les liens étroits entre la conceptualisation et la représentation dans les disciplines scientifiques. C'est le cas de Duval (1995, p. 4) qui présente l'idée selon laquelle les opérations de pensée (noésis) ne sont pas dissociées des opérations sémiotiques (sémiosis). Duval propose donc une approche différente de Vergnaud comme le signale Maury (2001) : *« En effet, pour ce dernier auteur, les représentations sémiotiques (les signifiants), bien que jouant un rôle fonctionnel, restent subordonnées aux éléments du signifié que sont les opérations. »*

L'hypothèse de Duval concerne particulièrement les mathématiques où les objets ne sont accessibles que par la médiation de la représentation. Cette particularité pose parfois un problème de confusion entre l'objet et sa représentation comme, par exemple, l'identification de la droite euclidienne avec le trait droit qui la représente – confusion expliquée par Lerouge (2000) en terme de « contagion du signifiant ». Pour Duval

---

<sup>2</sup> Remarquons que la question de la dimension sémiotique en mathématique est suffisamment importante pour être également prise en compte par l'approche anthropologique de la didactique des mathématiques. A ce propos, Chevallard (1996) et Bosch et Chevallard (1999) intègrent dans l'activité du mathématicien la manipulation d'instruments spécifiques, de manière réglée, au sein d'un système de travail constitué à la fois d'objets mentaux « émergents », et d'objets « ostensifs ». Ces derniers permettent au mathématicien non seulement d'agir mais aussi de voir ce qu'il fait, ce qu'il a déjà fait et ce qui lui reste à faire. Cette partie visible de l'activité mathématique possède donc à la fois une valence instrumentale et une valence sémiotique associée à différents registres sémiotiques oraux, écrits ou gestuels. Les objets ostensifs sont ainsi décrits par Chevallard comme des « instruments sémiotiques » : *« La notion d'instrument sémiotique constitue le point de départ d'une théorie unitaire du travail mathématique. Les mots, les symboles – arithmétiques et algébriques, et ceux de tous les formalismes que l'on voudra -, les gestes mêmes [...] articulés en un système de travail réglés, sont, tous ensemble, les instruments concrets – ostensifs- du travail mathématique. »*

*Tout système de travail, à cet égard, suppose la combinaison de plusieurs registres sémiotiques – orale, écrite, gestuelle. » (ibid., 1996, p. 53).*

(ibid., p. 75), il est par conséquent impératif d'associer la conceptualisation à des activités de conversions entre registres sémiotiques qui permettent de dégager l'objet de ses représentations. Ces activités demandent aux élèves de dépasser les difficultés sémantiques liées aux problèmes de non congruences<sup>3</sup> entre les représentations dans différents registres. Avec la conversion, Duval (ibid., p. 36) présente deux autres activités cognitives inhérentes à la sémiosis : la formation et le traitement. La formation d'une représentation dans un registre sémiotique implique la sélection d'un certain nombre de données en fonction des possibilités représentatives propres au registre choisi. Le traitement concerne les transformations que l'on peut opérer sur des représentations à l'intérieur même d'un registre sémiotique. Ce processus implique le respect d'un certain nombre de règles propres au registre. Ces notions de conversion, de formation et de traitement pourraient ainsi décrire les processus sémiotiques en jeu dans la mise en œuvre d'outils de modélisation. Cependant, nous avons vu que cette mise en œuvre ne relève pas d'un simple traitement sémiotique mais engage de véritables connaissances opératoires. Dans le cas contraire, l'activité échoue et nous pensons que la conversion dont parle Duval ne déroge pas à cette règle. Voici deux exemples pour appuyer cette position.

Ces problèmes de coordination des registres et d'articulations entre modes de représentation ont aussi été théorisés de façon très proche par Janvier (1993) qui distingue les « traductions » des « transpositions ». Les « traductions » concernent le passage d'un mode à l'autre. Nous avons ainsi, d'une part, les « modélisations » qui traduisent les descriptions verbales en formules, en graphiques ou en tableaux et, d'autre part, les « interprétations » qui traduisent ces derniers en descriptions verbales. La « transposition », quand à elle, concerne les réorganisations, les transformations au sein du même mode de représentation et présente ainsi des variantes du même objet. L'intérêt de telles descriptions tient au fait qu'elles permettent de rendre compte de certaines difficultés relatives au transfert sémantique entre les deux modes. Janvier évoque ainsi le cas « d'interférences » dues à la forme du mode-source dans les règles qui régissent le mode-cible. Pour appuyer cette idée, il présente l'exemple suivant de traduction fautive de l'expression : « *Il y a 6 fois plus d'étudiants que de professeurs* » par la formule :  $6E$

---

<sup>3</sup> Pour Duval deux représentations sont congruentes s'il y a correspondance sémantique entre leurs unités significatives respectives, qu'elles sont appréhendées dans le même ordre et qu'à chacune de ces unités n'en correspond qu'une seule dans l'autre représentation (ibid., p. 5).

= P (au lieu de  $E = 6 P$ ). Cette formule est fautive bien qu'elle respecte la congruence sémantique (au sens de Duval) de l'énoncé d'origine : les deux expressions présentent les mêmes unités de signification dans le même ordre.

Ce problème d'interférence semble proche de ce qu'étudie Ehrlich (1990) concernant certaines difficultés de nature sémantiques à résoudre des problèmes. Cet auteur (ibid., p. 223-227) montre que des opérateurs sémantiques localisés dans l'énoncé, comme les expressions «... de plus que...», «... de moins que...» peuvent se trouver en conflit de sens avec les opérateurs mathématiques attendues. Voici deux énoncés dont l'opérateur mathématique est la soustraction ( $9 - 3 = 6$ ) :

- « *La semaine dernière, il y avait 9 marchand sur la place. Il y en avait 3 de plus que cette semaine. Combien y en a-t-il cette semaine ?* »
- « *La semaine dernière, il y avait 9 marchand sur la place. Cette semaine, il y en a 3 de moins. Combien y en a-t-il cette semaine ?* »

Le premier problème connaît de moins bons résultats que le deuxième parce que l'opérateur sémantique s'opposerait sémantiquement à l'opérateur mathématique (la soustraction signifie habituellement une diminution dans le langage courant). Ehrlich (ibid., p. 227-279) explique que la traduction ne se réduit pas un simple transfert de données.

Ces exemples renforcent donc l'idée que le recours à des outils de modélisation ou à des opérateurs mathématiques ne se réduit pas à de simples traitements de signifiants mais procèdent bien d'une activité effective d'élaborations sémantiques à partir de connaissances opératoires. Même s'il n'y a pas de « noésis sans sémosis » selon Duval (1995), il est difficile de penser que les représentations sémiotiques commandent à elles seules la compréhension des énoncés de problèmes. Il est tout aussi difficile de comprendre que dans des activités de conversion au sens de Duval, les sujets arrivent à dépasser les problèmes de cloisonnement de registre sans le recours à la noésis. Nous ne dirons donc pas comme Duval (ibid., p. 4) que « [...] c'est la sémosis qui détermine les conditions de possibilité et d'exercice de la noésis. » Il nous semble que ces deux dimensions de l'activité cognitive interagissent, surtout en résolution de problème. Les travaux de Fischbein et Gazit (1988) que nous présentons à présent montre l'importance de cette interaction.

### c. Signe et intuition

L'apport de ces différents auteurs montre qu'il est difficile d'ignorer les relations entre les systèmes sémiotiques de représentation et la conceptualisation d'objets scientifiques ou la résolution de problèmes. Pour Fischbein et Gazit (1988) le recours au schéma en arbre pour résoudre le problème posé, par les opérations qu'il suppose, prend son effectivité quand il accompagne un processus particulier, celui de l'intuition : « *De cette façon, les points de vue algorithmiques et intuitifs sont synthétisés dans une unique « vue d'esprit », ou une unique opération mentale.*<sup>4</sup> » (ibid., p. 194). Ces auteurs se réfèrent à Fischbein (1975) qui présente les intuitions comme des composantes importantes de l'intelligence. Cet auteur les définit comme des processus cognitifs qui interviennent directement dans l'action pratique du sujet ou dans ses opérations mentales du fait de leurs caractéristiques d'immédiateté, de globalisation, d'extrapolation et d'évidence. Il distingue les intuitions primaires, directement issues de l'expérience, de l'intuition secondaire issue de l'apprentissage scolaire qui permet à l'élève d'intégrer dans son activité certaines structures de raisonnement.

Son hypothèse consiste à penser qu'avec le recours à un mode de représentation adéquat des structures en jeu, le sujet peut accéder plus facilement à son apprentissage initial ainsi qu'à sa généralisation à l'ensemble des problèmes qui relèvent de la même opération. Ainsi, l'apprentissage des schémas en arbre, en présentant une structure équivalente à la structure des opérations de permutation peut, dès le stade des opérations concrètes, mettre en place des intuitions secondaires relatives au raisonnement combinatoire.

Fischbein et Grossman (1997) mettent en relation les intuitions avec les schèmes qui organisent la conduite du sujet en situation. Selon Vergnaud (1990, p. 139) un schème repose toujours sur une conceptualisation implicite en terme d'invariants opératoires. Ces deux structures mentales de la conduite partagent ainsi selon ces auteurs certaines propriétés de stabilité, d'adaptation, d'autorité et de généralité. Mais elles se distinguent dans le sens où les schèmes sont des programmes d'interprétation et d'action organisés en structures séquentielles alors que les intuitions sont des attitudes mentales globales.

---

<sup>4</sup> Traduit de l'anglais par nous : *This way, the formal, the algorithmic and the intuitive points of view are synthesized in a unique « vue d'esprit », or a unique mental operation.*

Fischbein et Grossman pensent que les intuitions sont fondées par des règles et des calculs implicites. Elles seraient donc dépendantes des schèmes. Pour vérifier cette idée, ils organisent une expérimentation demandant à des élèves de 5<sup>ème</sup>, 3<sup>ème</sup>, 1<sup>ère</sup>, (grades 7, 9 et 11) à des enseignants en formations et à des adultes ayant peu de connaissances mathématiques d'estimer les réponses à des problèmes de combinaison, d'arrangement et de permutations (collections de 3, 4 et 5 objets). Puis ils comparent ces réponses aux résultats corrects et les mettent en perspective avec les justifications a posteriori recueillies par des entretiens afin d'en saisir les mécanismes profonds. Dans l'ensemble, le contenu des entretiens montre que l'estimation se base bien sur des opérations mentales appropriées – ce qui reflète certainement l'influence d'un schème. Pour Fischbein et Grossman, cela dénote une transformation du schème (de structure séquentielle) en intuition selon un processus de condensation qui le réduit à une structure minimale, un principe global.

#### **4. Synthèse concernant l'approche théorique, la problématique et l'opérationnalisation de notre recherche**

Pour nous résumer, nous dirons que notre recherche s'intéresse à certains effets liés à la sémantique des énoncés de problèmes sur les processus de résolution. Il s'agit de faire dénombrer par des élèves du collège des combinaisons de 2 objets pris parmi  $n$ . Pour étudier ces effets, nous avons adopté une approche cognitive et pragmatique que nous allons résumer à présent avant de présenter notre expérimentation.

Dans cette approche de la résolution de problème (et par conséquent des processus de conceptualisation qui l'accompagnent), les rapports entre l'activité de l'élève et le contexte sémantique donné par l'énoncé s'analysent en terme de représentation du problème. Cette notion peut se définir comme une entité mentale circonstancielle qui entretient avec la situation des liens que Vergnaud (1990) qualifie « d'homomorphes ». Cette représentation est structurée à partir de l'interprétation de l'énoncé faite par l'élève, elle est donc constituée de significations. Un tel processus porte en effet sur le contenu de l'énoncé, à la fois sur les caractéristiques des objets et sur leurs relations. Elle détermine donc une sélection parmi ces données pour ne retenir que celles qui semblent convenir par rapport à la réponse attendue. A l'origine de cette sélection, il y a des

connaissances de nature opératoire du fait des liens qu'elles entretiennent avec certaines règles d'action. Ces connaissances opératoires participent à la modélisation de la situation en ayant souvent recours à des registres sémiotiques pour représenter la situation et opérer dessus. Certains de ces registres sont propres à une discipline scientifique comme dans les cas de mises en équation algébriques ou le recours à des formules. Mais l'utilisation spontanée d'un schéma procède aussi du recours à un outil de modélisation ayant, dans ce cas un statut plus ou moins privé. En contre partie, l'emploi plus ou moins pertinent ou malheureux de formules ne peut être considéré comme relevant d'une activité de modélisation ce qui interroge du point de vue de la didactique des disciplines l'enseignement de ces formules.

Dans ce cadre-là, notre travail cherche à faire un inventaire des difficultés de résolution liées aux caractéristiques d'une variable de situation définie par les travaux de Dubois (1984) et Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (1997). Il s'agit des modèles combinatoires implicites dont les modalités sont la partition, la sélection et la distribution. Cette variable peut jouer comme variable didactique en définissant un certain nombre de situations relatives au champ conceptuel des dénombrements élémentaires. Ce point particulier pose la question de la généralisation et du transfert sémantique entre les différentes situations qui relèvent des mêmes opérations. Cette question justifie l'inventaire que nous voulons produire sur les difficultés de nature sémantiques liées aux caractéristiques contextuelles des différents modèles combinatoires implicites. Ces quelques lignes pour résumer notre approche théorique nous permettent, à présent, de justifier les moyens mis en oeuvre pour analyser notre corpus et rendre compte des effets sémantiques liés aux modèles combinatoire implicites.

Il est courant de commencer une analyse des données recueillies par une étude des performances. Mais se limiter à cet aspect des choses suppose que résoudre un problème est essentiellement déterminée par la présence chez l'élève de connaissances opératoires abstraites et décontextualisées. Or, dans la recherche de Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (*ibid.*), les différences de performances observées selon le modèle combinatoire implicite montrent que ces derniers ne sont pas des objets neutres sur lesquels porte l'activité mathématique de l'élève. Ils possèdent des caractéristiques qui jouent sur les significations particulières que les élèves élaborent au cours de l'interprétation. Dans notre recherche, ces significations sont abordées à partir des procédures mises en oeuvre,



des traces écrites et des justifications qui les accompagnent. Nous considérons ces procédures, ces écritures et ces justifications comme des indices à partir desquels il est possible d'inférer les significations élaborées par les élèves, en relation avec les particularités sémantiques des différentes modalités du facteur modèle combinatoire implicite. Notre objectif est donc bien de proposer un modèle relativement complet qui décrit les interactions entre les représentations des élèves (représentation du problème élaborée, connaissances opératoires mises en œuvre) et les contextes sémantiques des différents problèmes posés.

Les élèves qui constituent nos échantillons n'ont fait l'objet d'aucun enseignement en matière de combinatoire élémentaire. Le choix de cette population est tout de même déterminé par deux points. D'une part, des travaux précédents ont montré qu'il est raisonnable de penser que ces élèves possèdent tout de même un certain nombre de connaissances opératoires relativement effectives en matière de dénombrement élémentaires. D'autre part, ne possédant pas de procédures expertes, nous faisons l'hypothèse que ces élèves sont donc plus sensibles à l'effet sémantique lié à la nature des modèles combinatoires implicites.

Notre recherche a donc pour objet les significations qui déterminent à la fois les procédures et les raisonnements spontanément mis en œuvre par des élèves du collège (classe de 4<sup>ème</sup> – grade 8) pour certains problèmes qui relèvent du champ conceptuel de la combinatoire élémentaires. Ce dernier, nous l'avons vu ci-dessus, est délimité par Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (1997) en croisant deux facteurs de complexité des tâches mathématiques : les opérations combinatoires (arrangements, permutations et combinaisons) et les modèles combinatoires implicites (sélection, distribution et partition). A ce dernier facteur, nous avons ajouté l'association de 2 éléments pris parmi  $n$  en faisant l'hypothèse qu'il s'agit bien là d'une nouvelle modalité possible. Nous avons réduit le facteur « opérations combinatoires » à la seule modalité des combinaisons puisque les travaux de Piaget et Inhelder (1951), de Fischbein et Gazit (1988) et de Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (ibid.) ont montré que les problèmes relevant de cette opération pouvaient être assez bien résolus par des sujets d'environ 13–14 ans sans qu'ils aient reçu d'enseignement concernant ces contenus.

Notre travail est constitué de deux expériences. La première, exploratoire, est organisée sous forme de « devoir sur table ». Les élèves travaillent seuls sur un des problèmes définis par notre protocole expérimental. A partir de cette épreuve nous avons obtenu des données concernant les performances qui ont confirmé l'association comme une nouvelle modalité pertinente du facteur « modèle combinatoire ». Enfin et surtout, elle nous a permis de relever l'ensemble des procédures observables dans le corpus recueilli.

La deuxième expérience a pour objectif de saisir les raisonnements et les conceptions qui sous-tendent la mise en œuvre de ces différentes procédures. Cette épreuve est organisée sous forme de travail en groupe (en « ateliers ») au cours desquels des groupes de trois élèves devaient résoudre ensemble un des problèmes de la première expérience avec  $n=20$ . Nous présenterons dans cette partie les approches théoriques qui permettent d'approcher le contexte interactionniste et social de cette épreuve. Elle présente, en effet une rupture théorique avec la première dans la mesure où les significations ne sont plus appréhendées comme uniquement relative à l'individu mais comme quelque chose de partagé dans un groupe d'élèves partageant une tâche commune. Weil-Barais et Dumas-Carré (1998, p. 4) signalent que dans ce cadre-là : « *Les propositions n'acquièrent un statut de connaissances qu'en tant qu'elles sont reconnues par les partenaires des échanges. L'élève n'est plus pensé comme un système cognitif isolé mais comme une personne qui utilise des ressources, qui les compare, les évalue, les critique, etc. La connaissance n'est plus conçue comme une relation entre des individus et des objets, mais comme une relation entre des personnes et des propositions qui peuvent être tenues pour vraie eu égard à des conventions partagées quant aux modes d'appréhension des situations.* » Dans ce type d'approche, une analyse du contenu des échanges entre les élèves a permis d'appréhender les modélisations et les raisonnements qu'ils engagent selon les problèmes posés. Cette observation a ainsi dégagé deux modèles de résolution dominants avec quelques variantes. Cependant, l'interprétation de l'effet lié à la sémantique des différents problèmes posés reste délicate dans la mesure où il est certainement difficile de dissocier ce qui relève des caractéristiques de chaque modèle combinatoire des propriétés relatives aux objets des collections en jeu.

## II. L'expérience « Devoir sur table »

Cette première épreuve a donc pour objet l'étude des différentes procédures que les élèves mettent en œuvre pour répondre à certains problèmes de dénombrement de combinaisons. Elle souligne par ailleurs l'importance de ces procédures relativement aux différentes modalités des facteurs expérimentaux : les modèles combinatoires implicites définis par Batanero, Godino et Navarro-Pelayo, *ibid.*, (dont un nouveau modèle : l'Association) ainsi que la valeur du paramètre  $n$  (avec les modalités  $n=4$  et  $n=20$ ). Voici les énoncés des problèmes posés, nous les commentons juste après :

- Modèle combinatoire : Sélection

*$n$  enfants jouent aux gendarmes et aux voleurs. Il faut une équipe de 2 gendarmes. Combien d'équipes différentes de gendarmes sont possibles en tout avec ces  $n$  enfants ?*

- Modèle combinatoire : Partition

*$n$  enfants jouent aux gendarmes et aux voleurs. On répartit les enfants en deux équipes : une équipe de gendarmes comprenant 2 enfants, une équipe de voleurs comprenant  $n-2$  enfants. À chaque partie on fait une nouvelle répartition des enfants en deux équipes, une équipe de 2 gendarmes et une équipe de  $n-2$  voleurs. Combien de répartitions différentes sont possibles en tout avec ces  $n$  enfants ?*

- Modèle combinatoire : Distribution

*En posant 2 jetons sur 2 cases d'une grille, on réalise ce qu'on appelle un "placement". On a une grille de 4 cases. Combien de "placements" différents sont possibles en tout sur cette grille de 4 cases ?*

- Modèle combinatoire : Association

*Quand 2 personnes d'un groupe de randonneurs se retrouvent, elles se saluent en se serrant la main droite. Ce dimanche matin, 4 personnes du groupe se retrouvent. Combien de saluts sont échangés en tout entre ces 4 personnes ?*

*En reliant 2 points par un trait, on obtient un segment. Sur une feuille de papier, il y a  $n$  points. Combien de segments peut-on tracer en tout entre ces  $n$  points ?*

Notre principale variable expérimentale concerne donc les modèles combinatoires implicites. Ainsi, les élèves doivent dénombrer des combinaisons produites par Sélection de 2 objets parmi  $n$ , par Distribution de 2 objets sur  $n$ , par Partition des  $n$  objets en groupes de 2 et  $n - 2$ , ou par Association des  $n$  objets 2 à 2. Ce dernier modèle n'est ni chez Dubois (ibid.), ni chez Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (ibid.), ni chez Roa (ibid.). Il réunit,  $p$  à  $p$ , les  $n$  objets d'une collection au sein même de celle-ci (par exemple, tracer les polygones possibles de  $p$  sommets avec  $n$  points disposés dans le plan, énumérer les groupes possibles de  $p$  personnes parmi  $n$  personnes). Il semble intéressant de l'introduire dans le sens où, contrairement à la sélection pour laquelle  $p$  objets sont sortis hors de la collection (tirer  $p$  à  $p$  avec remise les  $n$  boules d'une urne, par exemple), l'association les maintient dedans. Contrairement à la partition où les  $p$  objets considérés sont distingués des  $n-p$  autres, l'association ne constitue pas deux groupes dans la collection (un groupe de  $p$  « gendarmes » parmi  $n$  enfants pour attraper  $n-p$  « voleurs »). Enfin, d'un point de vue mathématique, l'association semble assez proche de la distribution formalisée en terme d'application (injective, surjective ou bijective) qui détermine les combinaisons possibles ( $p$  lettres identiques dans  $n$  enveloppes distinctes).

Cette description plutôt fonctionnelle des modèles combinatoires implicites est différente de celle de Dubois qui est de nature plus mathématique (échantillonnage, application et partition d'un ensemble). Elle renvoie plutôt aux significations véhiculées par certains termes qui leur sont associés. Ainsi, « tirer de » (Sélection), « couper » (Partition), « distribuer » (Distribution), « associer » (Association) sont des termes qui ne renvoient pas des actions équivalentes et nous ne pouvons les considérer donc comme sémantiquement neutres. Cette variation des significations détermine donc des situations spécifiques qui peuvent induire par hypothèse, des formes de réponses différentes tant au niveau des procédures et raisonnements qu'à celui des performances.

Si nous avons choisi de réduire notre champ expérimental au dénombrement des seules combinaisons, c'est en se référant aux travaux de Fischbein et Gazit (1988). Ces

auteurs montrent que des élèves de 11 à 13 ans n'ayant pas reçu d'enseignements en matière de dénombrements élémentaires (ce qui est le cas pour nos élèves) arrivent plus facilement à dénombrer des combinaisons que des arrangements ou des permutations. Ce point n'est pas en contradiction avec Piaget et Inhelder (1951) qui ont mis en évidence que l'émergence de procédures d'énumération systématique de combinaisons se fait relativement plus tôt que celle des opérations de permutations (et d'arrangements en tant que synthèse des combinaisons et des permutations). Ces dernières opérations ne deviennent fiables que vers 15 ans.

D'autre part Fischbein et Gazit (ibid.) montrent que, contrairement à ce qui se passe pour les arrangements et les permutations, les dénombrements de combinaisons sont d'abord moins bien réussis après un enseignement portant sur cette notion, mais ils sont bien mieux réussis six mois plus tard. Enfin, les élèves ayant eu cet enseignement se passent très volontiers du recours aux formules pour présenter des réponses sous forme d'énumérations des possibles. Les auteurs de cette étude pensent que l'enseignement de la formule perturbe ce qu'ils appellent les « stratégies intuitives et empiriques<sup>5</sup>, processus qui permettent à des individus non experts d'appréhender et de traiter la situation. Mais, selon Fischbein et Gazit, ces processus continueraient à se développer naturellement pour être mieux maîtrisée et ce progrès expliquerait les hausses de performances six mois plus tard. Ce phénomène que l'on observe à 11-12 ans se retrouve amplifié à 12-13 ans puisqu'à cette tranche d'âge, les performances en matière de dénombrement de combinaisons dépassent à terme celles qui sont relatives aux arrangements et aux permutations. Il est donc raisonnable de penser que ce niveau de compétence se retrouve pour des élèves de 13-14 ans qui constituent notre population.

Si les problèmes de notre expérience renvoient chacun aux différents modèles combinatoires implicites, ils se distinguent aussi par les valeurs numériques liées au paramètre  $n$ . Ainsi, les problèmes posés aux élèves demandent de dénombrer les combinaisons possibles sans répétitions dans une collection de  $n$  objets pris  $p$  à  $p$ . Plus précisément, les énoncés renvoient aux valeurs  $n=4$  et  $n=20$  et au seul cas particulier où  $p=2$ . Ce dernier paramètre n'a pas été retenu comme variable expérimentale et notre travail s'en trouve par là même relativement incomplet. Cependant, en réduisant de la sorte

---

<sup>5</sup> Dans l'article de Fischbein et Gazit (ibid. p.196), le terme exact est le suivant : « *Intuitive-empirical strategies for solving combination problems* ».

notre champ expérimental, nous avons privilégié la constitution d'un corpus importants pour chaque modalité des facteurs étudiés. Nous cherchons ainsi à recueillir un nombre conséquent d'indices pour appuyer les interprétations des différents résultats obtenus.

Nos problèmes présentent alors deux situations contrastées dans le sens où elles n'induisent pas de réponses de même nature :

- Quand  $n=4$ , l'inventaire peut se faire par une énumération plus ou moins organisée sur liste ou sur figure.
- Quand  $n=20$ , le recours à une énumération sur liste ou sur figure n'est pas très aisée, ou demande une organisation et une mise en œuvre conséquente de l'activité. A ce stade, il est plus intéressant d'avoir recours à des calculs pour répondre à la question posée.

Or, ce recours à des calculs demande de mobiliser des processus différents de ceux qui concernent une énumération sur figure. En se référant à Duval (1995), si on accepte l'idée que la pensée est assujettie au système de signes qui la véhicule, on peut comprendre que le codage et le traitement n'est pas le même dans le registre de la graphique et dans celui des mathématiques : ils possèdent des règles d'application et de fonctionnement propres. L'élève doit donc engager des processus de nature différente. Ainsi, cette variation portant sur l'effectif  $n$  de la collection introduit dans notre expérimentation deux situations susceptibles d'induire chez les élèves des formes de résolution relativement distinctes.

## **1. Définition de l'épreuve « Devoir sur table »**

Chaque élève de notre échantillon doit résoudre deux problèmes relatifs à un seul et même modèle combinatoire implicite ; mais ces deux problèmes diffèrent donc quant à l'effectif  $n$  de la collection. La moitié de notre échantillon commence par le problème  $n=4$  (épreuve codée 4-20) et l'autre moitié, par le problème  $n=20$  (épreuve codée 20-4). Il est classique, dans des situations expérimentales, d'inverser les questions pour neutraliser un éventuel effet d'ordre. Il paraît important de profiter de cette modalité du protocole pour étudier l'effet que peut avoir l'élaboration de la réponse d'un premier problème sur la résolution d'un second.

L'épreuve « Devoir sur table » est donc organisée selon plusieurs modalités. Chacune d'elles est caractérisée non seulement par un ordre de résolution lié aux valeurs du paramètre  $n$ , mais aussi au contexte sémantique tant au niveau des objets qui constituent la collection (des points reliés par des segments, des cases de grille cochées par deux croix ou des personnes qui se serrent la main ou jouent en équipes de deux) qu'à celui de leurs relations définies en terme de modèles combinatoires (association, distribution, partition, sélection).

Il n'a pas été possible d'organiser une étude systématique de l'effet produit par la nature des objets en jeu, ni de neutraliser cette variable en se référant à une seule collection d'objets. Cependant, des comparaisons restent possibles entre les réponses aux différents problèmes. D'une part, deux énoncés relevant de configurations différentes se réfèrent à la même collection : les Distributions et Partitions concernent des enfants qui jouent aux gendarmes et aux voleurs. D'autre part, deux énoncés qui correspondent au même modèle combinatoire implicite (Associations) mettent en scène des objets de nature différente : des individus se saluant et des points reliés à des segments. Les personnes qui se serrent la main appartiennent à une réalité évoquée, absente de l'environnement immédiat de l'élève ; elles procèdent à une activité inscrite dans le temps (impossible de serrer la main à deux personnes en même temps). En contre partie, des segments reliant des points ne sont pas, par nature, tributaires d'un déroulement temporel outre celui de leur tracé par l'élève qui produit la figure. De plus, les tracés de points et de segments sont facilement assimilés par les élèves à ce qu'ils représentent<sup>6</sup>. Pour ces raisons, la situation liée aux figures de géométrie se distingue sémantiquement de celle qui se réfère à un groupe de personnes se serrant la main : elles présentent des contenus relativement différents.

Ce qu'il a encore fallu contrôler comme variable, c'est le caractère ordonné ou non des objets qui constituent les collections en jeu. Nous savons à partir des travaux de Mendelsohn (1981), Fischbein et Gazit (1988) et Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (1997) qu'il est plus facile de procéder à un inventaire des possibles entre objets ordonnables par nature (numéros, alphabet) qu'entre des objets qui ne le sont pas directement

---

<sup>6</sup> Cette confusion peut avoir des conséquences effectives comme celle des « contagions » des caractéristiques visuelles du signifiant sur la construction des propriétés du référent, phénomène étudié et décrit par Lerouge (2000). Cet effet fait dire aux élèves, par exemple, que deux droites sécantes présentent plusieurs points communs du fait de l'épaisseur du trait.

(couleurs, individus). Mendelsohn (ibid.) fait l'hypothèse que, dans le premier cas, les individus n'ont pas à ordonner les objets du fait que la structure du contenu est déjà mémorisée. Les procédures qu'ils mettent en œuvre pour constituer l'inventaire des possibles s'appuient uniquement sur les positions relatives des objets. En contre partie, les individus qui travaillent avec des objets non ordonnables se préoccupent en premier de les ordonner dans l'espace pour ensuite utiliser ce système de repérage au cours de l'énumération. Nous avons donc choisi des collections d'objets non ordonnés pour constituer nos problèmes afin de ne pas induire de procédures particulières. Seule la situation de grille dont il faut cocher les cases présente un caractère ordonné puisqu'il est possible de repérer les cases dans le plan de la feuille, les unes par rapport aux autres, selon les directions verticales, horizontales et diagonales.

## **2. Les énoncés des problèmes**

Les énoncés de nos problèmes sont construits de manière à assurer au mieux une présentation identique des données et de la question ; il s'agit de limiter les biais qui pourraient éventuellement résulter de cet aspect des énoncés. La principale difficulté consiste à définir clairement pour l'élève ce qu'il doit dénombrer. Elle s'est essentiellement posée pour les problèmes « partition », « distribution » et une des deux problèmes « association ». Dans le premier cas, nous avons opté pour le terme de « répartition » en deux équipes (les « gendarmes » et les « voleurs »). Pour le problème « distribution », c'est le terme de « placement » qui s'est imposé et qu'il a fallu explicitement définir dans l'énoncé pour désigner une combinaison possible de deux cases dans la grille. Pour le problème des randonneurs qui se serrent la main en se disant bonjour (association), nous avons pensé que le terme de « salut » ne posait pas de difficulté. Or beaucoup d'élèves semblent avoir considéré qu'entre deux personnes il y a en fait deux saluts – ce qui induit la constitution d'arrangements, ordonnés par nature (cf. sous III.5.A, p. 116).

Toutes ces difficultés ne se posent pas quand les combinaisons à dénombrer sont caractérisées en terme « d'équipes » de deux gendarmes (problème « sélection ») ou de « segments » entre deux points (problème « association »).

Pour des nécessités de comparaison, nous avons donc cherché à limiter au possible les risques de malentendus sur ce qu'il fallait dénombrer. Il est cependant difficile



d'affirmer que ces artifices n'induisent pas d'une façon ou d'une autre des inégalités de résolution entre les différents problèmes. Cependant, une analyse qualitative des réponses (cf. l'épreuve « Ateliers de résolution de problèmes ») devrait permettre de mettre à jour l'effet produit par de tels biais.

### 3. Analyse de la tâche

La manière la plus classique de résoudre un problème de dénombrement de combinaisons consiste à appliquer la formule suivante :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Or les élèves qui ont participé à notre expérimentation n'ont fait l'objet d'aucun enseignement en matière d'analyse combinatoire ou de dénombrement élémentaires. Ils ne connaissent donc pas cette formule. Cependant, ils disposent d'autres moyens de résoudre ce type de problème. Ils peuvent mettre en oeuvre des énumérations (ce qui est suffisant quand le paramètre  $n$  est petit) mais aussi des calculs (quand  $n$  est grand et que les procédures d'énumération deviennent alors difficiles à organiser). Cette forme de résolution renvoie au sujet théorique « producteur de modèle » de Roa, (2000, p. 73 et suivantes). Nous en avons parlé dans l'introduction (cf. I.3.B, p. 17). Rappelons que, dans son analyse a priori, cet auteur définit deux profils de résolutions théoriques contrastées :

- d'une part, celui qui correspond à un sujet épistémique qui aurait recours à la formule enseignée parce qu'il en identifie les conditions d'application dans l'énoncé,

- d'autre part, celui qui renvoie à un sujet épistémique qui, pour une raison ou pour une autre, ne peut pas appliquer la formule et doit donc produire un modèle de réponse par lui-même :

*Dans ce cas, il doit utiliser d'autres types de recours et générer par lui-même un modèle combinatoire, en partant des règles de base de la somme, du produit et du quotient conjointement à l'utilisation de l'énumération, de la récursivité et des stratégies telles que la division du problème en parties. On évoque un sujet qui, bien qu'ayant reçu un enseignement sur ce point, ne se rappelle pas des concepts et méthodes corres-*

*pondantes ; par cela, il se retrouve dans des conditions similaires à un sujet qui n'aurait reçu aucun enseignement*<sup>7</sup>. (Roa, *ibid.*, p. 73)

Les élèves de notre expérience correspondent donc à ce dernier profil. Il est donc nécessaire de revenir quelque peu sur ces deux points.

## **A. Les procédures de calcul**

Dans l'extrait précédent, Roa parle du recours à la règle de la somme et du produit. Nous allons à présent les définir puisque les procédures de calcul peuvent être organisées à partir d'elles. Rappelons que les élèves de notre expérience ne les connaissent pas. Cependant, elles correspondent aux propriétés spécifiques qui caractérisent les problèmes de dénombrements élémentaires. Nous allons les présenter dans une approche intuitive, sans entrer dans un quelconque formalisme mathématique. Il ne s'agit pas de rendre compte du raisonnement réel des élèves mais de voir comment ces deux règles permettent une résolution de nos problèmes par des calculs.

### **a. Le recours à la règle de la somme**

Cette règle peut s'énoncer de cette façon : si on peut tirer un objet  $a$  de  $m$  façons et un objet  $b$  de  $n$  façons, alors on peut tirer  $a$  ou  $b$  de  $m+n$  façons.

Il est possible d'appliquer cette règle dans nos situations de la manière suivante :

Dans une collection de  $n$  objets, si on peut apparier de  $n-1$  façons un premier objet avec chacun des autres, ou de  $n-2$  façons un deuxième objet (Puisque les apparierements possibles avec le premier objet ont déjà été constitués) ou de  $n-3$  façons un troisième objet, etc. alors on peut apparier de  $n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1$  façons les  $n$  objets de la collection.

L'élève considère d'abord qu'un des 20 objets peut constituer une combinaison avec chacun des 19 autres. Puis, il prend en compte le fait qu'un deuxième objet ne peut

---

<sup>7</sup> Traduit par nous. Voici le texte original : *En dicho caso, debe usar otros tipos de recursos y generar por sí mismo un modelo combinatorio, partiendo de las reglas básicas de la suma, producto y cociente, junto con el uso de la enumeración, recursión y estrategias tales como la división del problema en partes. Se trataría de un sujeto que, aunque ha recibido instrucción sobre el tema, no recuerda los conceptos y métodos correspondientes, por lo que está en condiciones similares a un sujeto que no ha recibido instrucción.*

le faire qu'avec les 18 objets restants (puisqu'il a déjà été utilisé avec le premier). Il généralise alors cette propriété à l'ensemble des objets de la collection et pose l'opération suivante :  $19 + 18 + \dots + 2 + 1$ , ce qui donne 190.

### **b. Le recours aux règles du produit et du quotient**

Cette règle peut s'énoncer de la manière suivante : si on peut tirer un objet a de  $m$  façons et un objet b de  $n$  façons, alors on peut tirer a puis b de  $m*n$  façons.

L'application de cette règle à nos problèmes se fait ainsi : on peut choisir le premier des deux objets à apparier de  $n$  façons différentes puis le second de  $n-1$  façons différentes parce qu'il n'y a pas remise du premier objet choisi ; alors on peut choisir un premier objet puis un second de  $n*n-1$  façons différentes. Comme on ne tient pas compte de l'ordre (puisque ce sont des combinaisons) alors, il faut diviser par deux le résultat trouvé.

L'élève prend en compte le fait que, pour constituer une des combinaisons possibles, le premier objet peut être choisi de 20 façons différentes puis le deuxième de 19 (puisque'il n'en reste que 19). Il produira donc la réponse  $20*19$  (et, s'il applique la « règle du quotient », il divise par 2 le résultat obtenu puisque les combinaisons ne sont pas ordonnées).

Roa (ibid., p. 118) précise que le recours adéquat à la règle du quotient demande aux élèves d'établir une relation d'équivalence dans un ensemble de configurations combinatoires. Les combinaisons n'étant pas ordonnées par nature, les paires AB et BA sont équivalentes et ne doivent donc être comptées deux fois.

Cet auteur donne un exemple d'utilisation non pertinente de la règle du quotient pour un élève qui doit dénombrer les possibilités de faire faire 2 activités différentes (français et math) par groupe de 2 à 4 personnes. Cet élève répond qu'on peut faire 3 groupes différents de paires (AB-CD, AC-BD et AD-BC). Roa explique que la relation d'équivalence (pour AB-CD et CD-AB, on ne compte qu'une possibilité) établie par l'élève est par conséquent inadéquate. Nous retrouvons cette erreur dans nos protocoles et nous l'interprétons en terme d'énumération incomplète par perte du référent (cf. sous III.2.C.d, p. 78).

## **B. Les procédures d'énumération**

Les procédures arithmétiques que nous venons de décrire permettent de trouver le nombre de combinaisons possibles d'une collection d'objets quelconques quel qu'en soit l'effectif. Cependant, quand ce dernier est peu important, il est plus simple de procéder à une simple énumération. Toute la difficulté réside alors dans l'organisation de l'inventaire des combinaisons possibles.

Nous présentons, à ce sujet, quelques travaux ayant relevé certaines procédures spécifiques et qui peuvent apporter quelques éclaircissements sur ce point. Ces dernières ont été mises en œuvre par des sujets jeunes (de 8 à 10 ans environs). Elles concernaient essentiellement des énumérations de couples possibles d'un produit cartésien ou de permutations entre les objets d'une collection. Bien que la tâche liée à notre protocole expérimental demande aux élèves de dénombrer des combinaisons, nous considérons que toutes les conduites correspondantes relèvent de ce que Vergnaud et Cohen (1969) appellent une « activité combinatoire ». Pour notre travail, nous définissons cette notion comme une activité spécifique qui, selon les situations, énumère et dénombre, d'une façon ou d'une autre, des arrangements, des permutations ou de combinaisons.

### **a. Les procédures observées par Vergnaud et Cohen (1969)**

Cette étude a donc pour objet l'activité combinatoire des enfants d'environ 8 ans. L'épreuve consiste à leur faire déterminer successivement, d'une part, les couples d'un produit cartésien de deux ensembles distincts de cardinal 3, d'autre part, les couples d'un produit cartésien d'un ensemble avec lui-même, enfin, les permutations de 3 éléments et les permutations de 4 éléments.

Sans entrer dans les détails, les procédures systématiques trouvées sont les suivantes :

- Procédures utilisant l'ordre alphabétique : AB, AC, AD, etc. Cette procédure se retrouve en terme « d'énumération systématique » chez Maury et Fayol (1986, cf. ci-dessous).
- Procédures symétriques : CD, DC, etc. Cette procédure n'est pas pertinente pour nos problèmes puisqu'elle énumère des appariements ordonnés.

- Procédures circulaires : AB, BC, CD, etc. que l'on retrouve chez Maury (ibid.). Elle est insuffisante pour énumérer tous les possibles de nos problèmes puisqu'elle n'associe chaque objet qu'à son voisin.
- Procédures consistant à garder constant le premier élément et énumérer les permutations possibles des autres éléments selon une autre procédure : ABCD, ACDB, ADBC, etc. Cette procédure est nommée « élément constant » chez Mendelsohn (1981, cf. ci-dessous).
- Procédures consistant à placer un des objets aux différentes places possibles du terme : YABC, AYBC, ABYC, etc. Cette procédure est appelée « permutations circulaires » chez Mendelsohn (ibid.).

Ces deux dernières procédures ne sont pas pertinentes pour nos problèmes puisque les dénombrements ne portent pas sur des permutations mais des combinaisons.

#### **b. Les procédures observées par Mendelsohn (1981)**

Mendelsohn étudie les différents niveaux d'organisation de l'énumération des permutations par des enfants d'environ 10 ans. Ces niveaux de conduite se répartissent depuis l'activité de base qui consiste à modifier un terme pour en obtenir un second (par exemple : ATRI → IRTA) jusqu'à l'organisation globale d'un plan d'ensemble qui régit les différentes transformations à appliquer selon un certain ordre. Ils présentent ainsi différents niveaux de procédure :

- Le tâtonnement empirique,
- Les algorithmes simples qui peuvent prendre différentes formes :
  - Élément constant : ATRI, AIRT, ARIT (déjà évoqué ci-dessus).
  - Terme inversé : ATRI, IRTA.
  - Position : le sujet construit chaque terme dans l'ordre du premier terme : ATRI, TRAI, RTIA, IATR.
  - Élément constant et position : le sujet maintient un élément dans sa position et permute dans la deuxième position les autres : ATIR, AIRT, ARTI.

- Permutations circulaires : ATRI, TARI, TRAI, TRIA (procédure vue chez Vergnaud et Cohen, ibid.).
  - Récurrence : le sujet construit les termes possibles de trois lettres et place la quatrième lettre à droite de chaque terme.
  - Combinaisons de blocs inversés : AT IR, TA RI, IR AT, RI TA, etc.
- Les procédures complexes pour lesquelles une règle algorithmique est complétée par une deuxième. Cette dernière s'applique à chaque terme produit par la première règle:

1. ATIR → 4. ATRI

2. ARTI → 5. ARIT

3. AIRT → 6. AITR

(les numéros indiquent l'ordre d'énumération)

- Les procédures à plan unique pour lesquelles la règle complémentaire s'applique à chaque pas de la règle initiale :

1. ATIR → 2. ATRI

3. ARTI → 4. ARIT

5. AIRT → 6. AITR

- Les méta procédures pour lesquelles le sujet se représente l'ensemble des transformations possibles sans être obligé de les construire. Il commence l'énumération puis, une fois la règle comprise, il l'utilise pour répondre par des calculs :

1. RATI

2. RAIT

3. RTAI

4. RTIA

5. RIAT

6. RITA

*« Le R peut prendre trois autres places, ce qui fait  $6 \times 4 = 24$  possibilités. »*

### c. Les procédures observées par Maury et Fayol (1986)

Cette expérience étudie les procédures mises en œuvre par des élèves de 9 et 10 ans sur des situations se référant à la combinatoire et mettant en jeu des circuits électriques (cf. aussi page 11). Dans une première expérience, les élèves doivent identifier la seule pile et la seule lampe qui fonctionnent parmi quatre piles et quatre lampes. Dans une deuxième expérience, ils doivent découvrir la seule connexion existante entre quatre bornes à droite et quatre bornes à gauche d'un circuit électrique.

La tâche demandée correspond à l'énumération d'un produit cartésien. Les procédures qui ont été observées sont les suivantes :

- Enumérations systématiques : l'élève fixe une pile et essaie toutes les ampoules avant de passer à la seconde pile. Cette procédure et la suivante sont aussi présentes dans l'étude de Vergnaud et Cohen (ibid.).
- Enumération partitive : l'élève ne relie que les plots de gauche et de droite qui se font face.
- Enumération croisée : l'élève fixe un plot à gauche et essaie successivement les plots à droite. Ensuite, il fait pareil en fixant cette fois un plot à droite.

Nous retiendrons donc l'énumération systématique comme procédure d'énumération qui permet de dénombrer de façon organisée les combinaisons possibles dans nos problèmes.

## C. Quelques erreurs attendues

Il serait incomplet de terminer cet examen des réponses possibles sans évoquer les erreurs que peuvent produire les élèves en cherchant la solution aux problèmes que nous leur posons<sup>8</sup>. Nous rappelons ainsi parmi les erreurs relevées par Batanero, Godino

---

<sup>8</sup> Cette description des erreurs attendues semblerait incomplète si nous ne rappelions pas l'inventaire de certains « pièges » de résolution que relèvent Hadar et Hadass (1981). Ces auteurs travaillent sur les difficultés rencontrées par les élèves pour résoudre le problème d'Euler-Bernouilli concernant  $n$  lettres placées dans  $n$  mauvaises enveloppes. Cependant, leurs observations ne nous concernent pas dans la mesure où leur problème demande de généraliser une méthode de dénombrement avec des paramètres de même valeur  $n=p$ . Ce n'est pas le cas pour nos problèmes qui se limitent aux seuls paramètres  $n=4$  ou  $20$  et  $p=2$ .

et Navarro-Pelayo (ibid.), quelques unes qui concernent particulièrement les problèmes de dénombrement de combinaisons.

- ENONCE (mauvaise interprétation de l'énoncé) : une des mauvaises interprétation des énoncés concerne celle des termes « distribue », « divise », « coupe » que les élèves peuvent interpréter comme induisant la division de l'effectif de la collection  $n$  (considéré comme l'effectif du tout) par  $p$  (pris comme l'effectif de la partie). Ce type d'erreur peut donner selon la valeur de  $n$  ( $n=4$  et  $n=20$ ) les réponses suivantes :  $4/2 = 2$  possibilités et  $20/2 = 10$  possibilités.

- ORDRE : Les élèves énumèrent et dénombrent des arrangements, ordonnés par nature, alors que les combinaisons ne le sont pas en tant que sous-ensembles possibles d'un ensemble. Elles ne sont donc pas ordonnées. Avec cette erreur, nous pouvons avoir l'inventaire suivant : AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, BD, DB, CD, DC (les combinaisons répétées, donc en trop, sont soulignées). Nous pouvons trouver ce type d'erreur avec une procédure multiplicative si l'élève oublie de diviser par 2 le résultat trouvé par  $n*(n-1)$ . Avec une procédure additive cela donnerait, par exemple, pour  $n=4$  :  $3+3+3+3$  car le premier objet peut s'apparier avec chacun des 3 autres (A avec B, C et D), le second aussi (B avec A, C et D), le troisième aussi (C avec A, B et D), ainsi que le dernier (D avec A, B et C). Cette erreur a aussi été relevée par Fischbein et Gazit (1988).

- REPETITION : certains élèves peuvent énumérer et dénombrer des combinaisons constituées du même objet alors que nos problèmes ne portent pas sur des combinaisons avec répétition. Dans une énumération, nous pouvons observer l'inventaire suivant : AA, AB, AC, AD, BB, BC, etc. (les réponses fausses sont soulignées). Avec une procédure additive, nous aurons pour  $n=4$  l'opération suivante : 4+3+2+1 et avec  $n=20$ , ce sera : 20+19+18+ ... +2+1. A chaque fois, le premier terme est non pertinent puisque pour  $n$  objets d'une collection, il ne peut y avoir que  $n-1$  combinaisons possibles avec chacun des autres. Une procédure multiplicative entachée de cette erreur donnerait donc l'opération suivante :  $n*\underline{n}/2$  (l'erreur est soulignée).

- LISTE : les élèves peuvent énumérer des listes sans systématisme, par essai et erreur.



- REPONSE INTUITIVE : certains élèves donnent des réponses intuitives, spontanées et sans justifications que Fischbein et Gazit (ibid.) ont aussi relevé de façon laconique : « [...] sometimes such a wrong solution simply derives from an incorrect or incomplete enumeration of possibilities. »

Ces auteurs relèvent encore quelques autres cas d'erreurs. Certains élèves se contentent de multiplier les deux paramètres  $n$  et  $p$  ou bien se contentent de donner  $n$  comme réponse. Nous avons trouvé ce type de réponse dans notre corpus, cependant de façon très rare sans que les justifications des élèves puissent nous aider à les interpréter.

#### 4. Population et conditions de passation

Notre échantillon est constitué de 319 élèves de 4<sup>ème</sup>. Ces élèves sont issus de différents collèges de Paris, de la région parisienne et de la région de Montpellier. Ils n'ont pas fait l'objet d'enseignement en matière de dénombrement élémentaire ; ces apprentissages s'effectuent de la fin du second cycle de l'enseignement secondaire, uniquement en terminal scientifique (nous l'avons évoqué au début de l'introduction de ce mémoire). La notion de combinaison et la formule associée à leur dénombrement leur sont donc tout à fait inconnues. Ce ne sont donc pas des « sujets modélisants » au sens de Roa, comme nous l'avons évoqué ci-dessus, p. 38.

Il s'agissait pour nous de les mettre dans une activité de découverte de situations et non d'évaluer le niveau d'expertise de leur activité. A partir du moment où ces élèves sont confrontés à des problèmes pour lesquelles ils ne possèdent pas de procédures expertes, leurs performances sont naturellement faibles. Dans une situation de recherche pour laquelle ils ne disposent pas d'outils rapidement et facilement accessibles, il semble naturel qu'ils présentent une sensibilité forte aux effets liés à la sémantique des énoncés. Ils peuvent alors produire une palette plus importante de réponses à observer.

Nous faisons l'hypothèse qu'en prenant en charge la résolution des problèmes que nous leur soumettons, une partie des élèves de notre échantillon est capable d'accepter la nouveauté de la situation et d'opérer certaines ruptures avec ce dont ils disposent comme acquis en matière de connaissances mathématiques. Ce sont ces ruptures qui leur permettent de traiter avec pertinence ces situations relativement nouvelles : il s'agit pour eux de reconnaître la nouveauté de la situation en évitant de l'assimiler de

façon opportuniste, et non pertinente, à d'autres classes de problèmes. Ces ruptures demandent de mobiliser de manière originale les connaissances qu'ils ont acquises spontanément ou non et de les adapter. Vergnaud (1990, p. 140) décrit ces processus à partir de l'hypothèse de schèmes :

*[...] l'observation des élèves en situation de résolution de problème, l'analyse de leurs hésitations et de leurs erreurs, montre que les conduites en situation ouverte sont également structurées par des schèmes. Ceux-ci sont empruntés au vaste répertoire des schèmes disponibles, et notamment à ceux qui sont associés aux classes de situations qui paraissent avoir une parenté avec la situation actuellement traitée. Simple-  
ment comme la parenté n'est que partielle et éventuellement illusoire, les schèmes sont seulement esquissés, et les tentatives souvent interrompues avant d'avoir été menées à leur terme ; plusieurs schèmes peuvent être évoqués successivement, et même simultanément dans une situation nouvelle pour le sujet (ou considérée par lui comme nouvelle).*

En matière de dénombrements élémentaires, les publications de Maury et Fayol (1986), Mendelsohn (1981), Fischbein et Gazit (1988) nous laisse penser que cette hypothèse est assez raisonnable. Rappelons que Piaget situe à la fin du stade des opérations concrètes (vers 12 ans) la construction de systèmes combinatoires comme « [...] marquée par la découverte d'une méthode permettant d'effectuer l'ensemble des opérations possibles sur un petit nombre d'éléments [...] » (Piaget, Inhelder, 1951, p. 229). Ce système va se développer progressivement au fur et à mesure de l'avènement de la pensée formelle. Notre population se situe donc à la charnière entre ces deux stades opératoires, ce qui nous permet d'anticiper une différence importante de difficultés entre l'épreuve  $n=4$  et l'épreuve  $n=20$ .

Le tableau suivant présente la distribution des élèves selon les dix modalités possibles de nos épreuves en autant d'échantillons dont l'effectif est d'environ 30 élèves. Ces épreuves, rappelons-le (cf. supra, p. 35.) sont constituées par le croisement des deux facteurs étudiés : les modèles combinatoires implicites ( $A_{slt}$ ,  $A_{sgm}$ , Dis, Par et Sél) et l'ordre de résolution des problèmes pour chaque élève (4-20 et 20-4).

**Tableau I : Distribution de notre échantillon selon les différentes modalités de l'épreuve « Devoir sur table ».**

Modèles combinatoires implicites	A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	Dis	Par	Sél	Total
Modalités de l'épreuve						
4-20	32	32	32	34	31	161
20-4	30	34	29	32	33	158
Total	62	66	61	66	64	319

La passation se déroule au cours de la classe de mathématique. Chaque élève travaille individuellement, dans des conditions de « devoir sur table » surveillé. Le professeur dispose de consignes précises concernant le déroulement de cette épreuve (cf. annexes, page 271). La durée de ce travail est explicitement donnée aux élèves pour vingt minutes. Le professeur ramasse toutes les réponses non encore rendues après 30 minutes.

Les élèves travaillent au stylo bille et doivent entourer les « repentirs » au lieu de les barrer ou de les faire disparaître. Ils ne disposent pas de leur calculatrice, ni de feuilles de brouillon. Il s'agit pour nous de pouvoir recueillir le plus de données possibles sur le travail qu'ils ont effectué pour résoudre les problèmes posés.

L'épreuve leur est présentée sur un feuillet de deux pages. Chacune d'elle expose un des deux problèmes  $n=4$  ou  $n=20$ . Les élèves doivent impérativement résoudre le problème de la première page avant celui de la seconde page, sans retour possible. Il s'agit, par cette contrainte, de préserver au mieux la première résolution des effets d'apprentissage issus de la deuxième résolution.

### **III. Réponses à l'épreuve « Devoir sur table »**

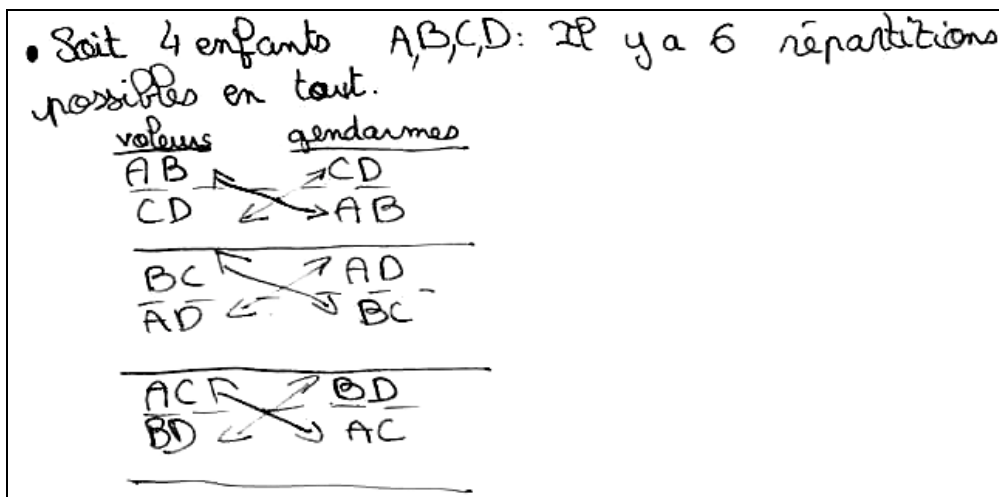
#### **1. Quelques remarques à propos des registres sémiotiques utilisés dans les réponses**

La question de la dimension sémiotique en mathématique est importante et nous avons présenté en introduction le point de vue de plusieurs auteurs (cf. sous I.3.C.b, p. 23). Avant d'étudier les différentes classes de réponses pertinentes ou non, chacune associée à certaines procédures particulières, nous présentons dans cette section les registres sémiotiques mis en œuvre par les élèves pour représenter la situation de référence et la traiter. Cette notion de registre sémiotique, nous la prenons à Duval (1995) puisque nous pensons avec lui et d'autres comme Vygotsky, qu'il n'est pas de pensée sans langage, pas de noésis sans sémiosis. Nous allons à présent décrire les recours aux différents registres de signes que nous observons dans notre corpus.

##### **A. L'énumération sur liste**

Dans nos énoncés, les objets des différentes collections en jeu ne sont pas distingués entre eux. Il s'agit de points, de personnes et de cases (bien que ces dernières peuvent être différenciées les unes des autres par leurs positions relatives dans la grille). Pour produire méthodiquement l'inventaire des groupes possibles, il est nécessaire de les coder par une lettre ou un nombre, voire une forme ou une couleur ou encore un nom. Nous avons vu avec Mendelsohn (cf. sous II.1, p. 35 et suivantes) que l'utilisation de repères ordonnés (lettres et nombres) peut faciliter la tâche alors que le recours à des repères non ordonnés (formes, couleurs et noms) peut la rendre plus difficile puisque dans ce cas, l'élève doit fournir un effort supplémentaire de mémorisation.

Ainsi, nous définissons l'inventaire sur liste comme étant une énumération méthodique qui s'appuie sur une identification des objets, un à un, afin d'éviter les oublis et les répétitions. Voici quelques exemples qui montrent la façon dont les procédures mises en œuvre s'appuient sur l'identification ordonnée ou non des objets :



Exemple 1 : Elève 057, problème Par 4-20  $n=4$ .

L'Exemple 1 montre que l'élève commence par identifier les objets en les codant par des lettres : « Soit 4 enfants A, B, C, D [...] ». Il distingue ainsi les combinaisons produites (AB se distingue de CD) pour les inverser : AB CD (1<sup>ère</sup> ligne) → CD AB (2<sup>nd</sup> ligne).

L'Exemple 2 est identique au précédent à cela près que les objets sont identifiés par des formes différentes (| • Δ ○). Nous avons reproduit ci-dessous le travail de l'élève afin de le rendre plus lisible. La colonne de droite représente les voleurs (que l'élève a codée avec un « V »), celle de gauche concerne les gendarmes (codée G) :

G	V
•	Δ ○
Δ ○	•
○	Δ •
Δ •	○
Δ	○ •
○ •	Δ

G	V
① ② ③ ④	
G	V
② ③ ① ④	
G	V
③ ① ② ④	
G	V
④ ③ ① ②	
G	V
④ ① ③ ②	
G	V
③ ④ ② ①	

Exemple 2 : Elève 148, problème Par 20-4  $n=4$ .

Dans ce cas, il est plus difficile de procéder avec méthode à l'inventaire requis puisque des séquences de formes ne sont pas structurées selon un ordre prédéfini. Cependant, le peu de données à traiter permet de produire un inventaire complet et sans redondances bien qu'il ne semble pas méthodique.

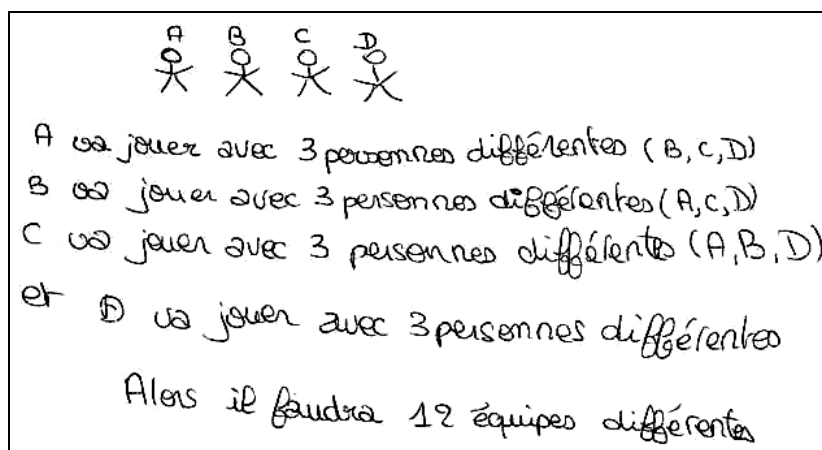
On peut faire 6 équipes différentes de gendarmes :

enfants : n°1 et 2  
 n°1 et 3  
 n°1 et 4  
 n°2 et 3  
 n°2 et 4  
 n°3 et 4

Exemple 3 : Elève 157, problème Sél 4-20,  $n=4$ .

L'Exemple 3 montre l'utilisation méthodique des propriétés d'ordre des nombres – ces derniers identifiant chacun des objets. L'élève énumère à partir d'un premier objet fixé (le 1) les groupes possibles dans l'ordre (1 et 2 ; 1 et 3 ; 1 et 4), puis il passe à un deuxième objet (le suivant dans l'ordre numéral, le 2) et recommence l'inventaire ordonné des groupes possibles (2 et 3 ; 2 et 4) et ainsi de suite. Cette procédure se trouve décrite par Mendelsohn (ibid.) en terme « d'élément constant ».

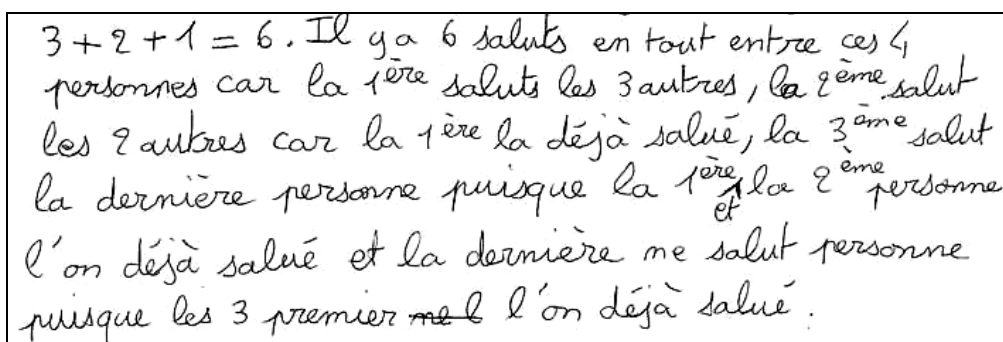
L'Exemple 4 est une autre forme d'inventaire ordonné où chaque objet est identifié par une lettre : les lettres représentant les objets repères sont mises dans l'ordre alphabétique ligne par ligne et les lettres correspondant aux objets avec lesquels ils sont associés sont aussi dans l'ordre de l'alphabet (B, C, D) pour **A**, (A, C, D) pour **B**, etc.



**Exemple 4 : Elève 151, problème Sél 4-20  $n=4$ .**

L'Exemple 5 est très voisin du précédent. L'élève résout le problème avec la procédure additive :  $3 + 2 + 1$ . Mais, dans son explication, les objets sont encore nommés de manière ordinale (« [...] la 1<sup>ère</sup> ..., la 2<sup>ème</sup> ..., la 3<sup>ème</sup> ..., etc. ») et il produit une sorte d'inventaire méthodique selon la procédure « élément constant » :

$3+2+1 = 6$ . Il y a 6 saluts en tout entre ces 4 personnes car la 1<sup>ère</sup> salue les 3 autres, la 2<sup>ème</sup> salue les deux autres car la 1<sup>ère</sup> l'a déjà saluée, la 3<sup>ème</sup> salue la dernière personne puisque la 1<sup>ère</sup> et la 2<sup>ème</sup> personne l'ont déjà saluées et la dernière ne salue personne puisque les 3 premières l'ont déjà saluées.



**Exemple 5 : Elève 100, problème A<sub>slt</sub> 20-4  $n=4$ .**

Cet exemple montre que le recours à un instrument sémiotique (le calcul) régi par la règle de la somme, est cognitivement très proche de l'énumération systématique à partir de l'élément constant.

## B. L'inventaire sur figure ou tableau

L'inventaire des combinaisons possibles peut être produit sur un certain nombre de figures. Dans ce cas, l'élève utilise les propriétés spatiales du plan à la fois pour repérer et différencier les objets de la collection (ils occupent des positions distinctes) et organiser méthodiquement l'énumération.

Afin de pouvoir l'analyser, nous faisons référence registre de la graphique tel qu'il a été décrit par Bertin (1977). Pour cet auteur, la graphique a pour fonction de transcrire dans le plan les relations d'ordre, de différence ou de proportion entre objets par des variations visuelles identiques du signifiant (ibid. p. 176-232). Ce dernier est donc caractérisé par des relations spatiales équivalentes à celles de l'objet représenté. Les propriétés perceptives de la figure, orientées sur la feuille selon l'ordre conventionnel de lecture (de haut en bas, de la gauche vers la droite) peuvent servir de repères ordonnés pour organiser de façon méthodique l'énumération. Par les repères spatiaux qu'elle fournit, la graphique permet d'engager une énumération méthodique au même titre que l'utilisation de l'alphabet ou de numéros.

Les problèmes que nous posons aux élèves qui ont participé à notre expérimentation concernent ce que Bertin nomme des données à une composante : l'énumération porte sur les objets d'une seule collection. Par conséquent, le mode de représentation le plus adapté pour des combinaisons serait la figure en réseau rectiligne ou circulaire. Voici deux exemples de représentation de combinaisons de 4 objets pris 2 à 2 :

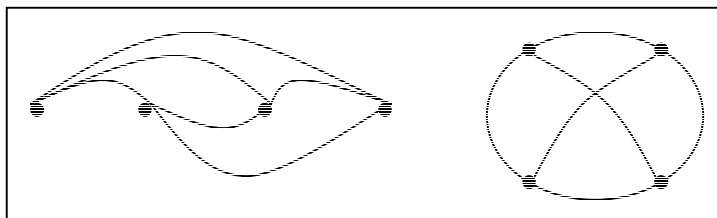


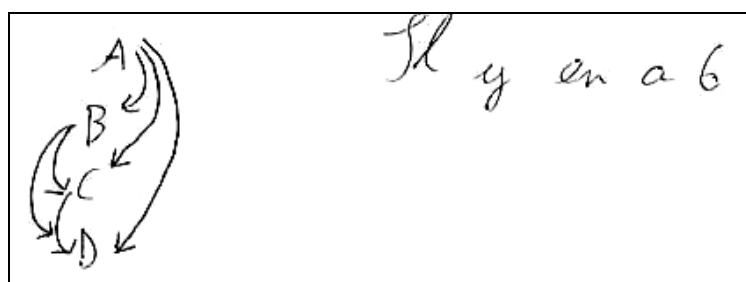
Figure 1 : Réseau rectiligne et réseau circulaire.

A ce propos, nous remarquons que le réseau circulaire, par son absence de points extrêmes, peut rendre plus facile l'inventaire des possibles par des lignes. Une telle fi-



gure peut être facilitatrice pour l'élaboration d'une réponse juste, surtout si le nombre d'objets de la collection est important.

Ainsi, l'inventaire sur figure s'appuie sur les propriétés d'ordre de la graphique et l'organisation spatiale des objets dans le plan. Ces derniers sont distingués par la place qu'ils occupent les uns par rapport aux autres. En principe, il n'est pas nécessaire de les identifier par des caractéristiques spécifiques (numéros, lettres, formes). Voici quelques exemples :



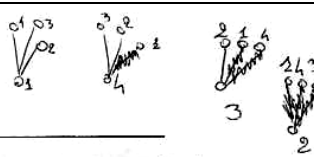

**Exemple 6 : Elève 217, problème A<sub>slt</sub> 20-4 n=4.**

L'Exemple 6 présente un réseau en ligne. Les objets sont identifiés par des lettres, mais cela est inutile pour en énumérer les combinaisons possibles. Ces derniers sont représentés par des lignes reliant méthodiquement les différents objets selon un ordre spatial (de haut en bas), du premier au dernier. Cette figure renvoie à une même organisation de l'activité que l'énumération sur liste de l'Exemple 3 selon la procédure « élément constant ».

Nous savons que les réseaux en arbres s'adaptent mieux pour inventorier les arrangements et les permutations du fait de leur caractère ordonné (cf. Fischbein, Pampu et Minzat, 1970). L'Exemple 7 montre le cas d'un élève qui procède à une énumération sur arbre. Il se retrouve avec un inventaire de paires ordonnées (ou couples : 1-2 avec 2-1, par exemple) et il est obligé de barrer les réponses redondantes en justifiant de cette façon : « [...] mais il y a 6 répétitions [...] ».

de naissance : 21/03/1900

ants jouent aux gendarmes et aux voleurs.  
t une équipe de 2 gendarmes.  
Combien d'équipes différentes de gendarmes sont possibles en tout avec ces 4 enfants ?  
**Justifie soigneusement ta réponse.**


Il y a 12 équipes possibles, car chaque enfant a 3 possibilités mais il y a 6 répétitions. En fait il y a 6 possibilités.

Exemple 7 : Elève 154, problème Sél 4-20  $n=4$ .

On peut en tracer 6.

Je le trouve en pensant à un carré et à ses diagonales

Justi



Exemple 8 : Elève 228, problème A<sub>sgm</sub> 4-20  $n=4$ .

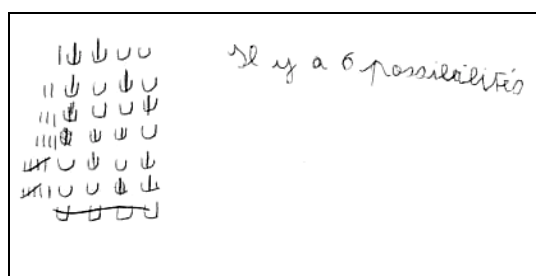
L'Exemple 8 présente une figure qui renvoie au réseau circulaire de Bertin. Il apparaît dans l'explication de l'élève que ce dernier assimile la figure à un quadrilatère, chaque objet est représenté par un des sommets : « *Je le trouve en pensant à un carré et à ses diagonales.* » L'interprétation semble ainsi s'appuyer sur une figure, le quadrilatère, dont certaines caractéristiques (4 côtés et 2 diagonales) participent certainement à la modélisation de la situation. Ce processus semble proche de ce que nous avons évoqué dans l'introduction sous le terme de transfert sémantique par analogie et qui permet de résoudre un problème en empruntant des connaissances opératoires issues d'une situation relativement mieux maîtrisée (cf. sous I.3.A, p. 12). Cette analogie semble produire une représentation tellement prégnante de la situation que certains élèves peuvent se passer de tracer la figure pour énumérer les combinaisons possibles, comme dans l'Exemple 9 :

« *On peut faire 6 placements : 2 en diagonale, 2 en largeur, 2 en longueur.* »

On peut faire 6 placement  
2 en diagonale, 2 en largeur, 2 en longueur

Exemple 9 : Elève 195, problème Dis 4-20,  $n=4$ .

Il serait faux de croire que la figure en réseau est la seule possibilité de représenter et de traiter la situation dans le registre de la graphique. Les figures suivantes (Exemple 10 et Exemple 11) montrent la situation et son traitement sous forme de tableaux.



Exemple 10 : Elève 134, problème Dis 20-4  $n=4$ .

Réponse

Il y a 6 équipes car

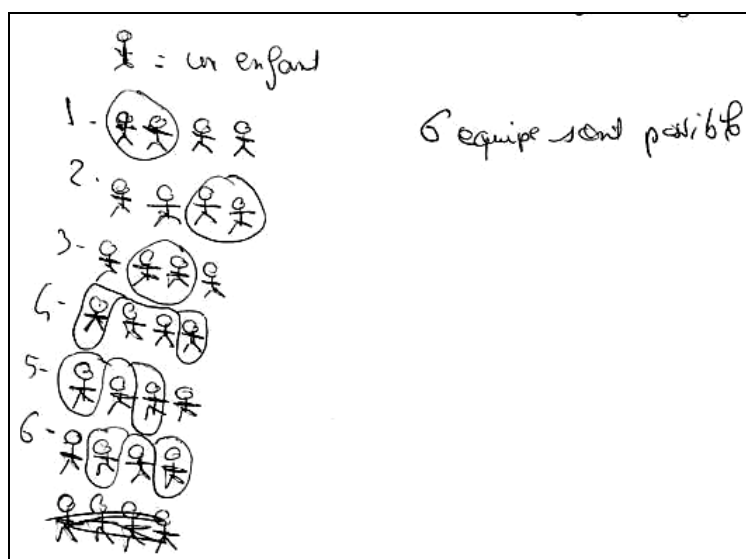
nb d'enfants	équipe(s)					
	1 <sup>er</sup>	2 <sup>e</sup>	3 <sup>e</sup>	4 <sup>e</sup>	5 <sup>e</sup>	6 <sup>e</sup>
1 <sup>er</sup> enfant	x	x	x			
2 <sup>e</sup> enfant	x			x	x	
3 <sup>e</sup> enfant		x		x		x
4 <sup>e</sup> enfant			x		x	x

Exemple 11 : Elève 264, problème Par 4-20  $n=4$ .

Avec ce type d'outil sémiotique qui utilise aussi les propriétés d'ordre et d'orientation du plan, l'élève peut organiser son action pour énumérer méthodiquement les groupes possibles. Un tableau croise deux ensembles de données ; dans nos exemples, les élèves ont mis en relation la collection des 4 objets (enfants) avec les différentes combinaisons possibles (équipes). La mise en relation se fait en cochant méthodiquement les cases concernées par l'inventaire. Nous pensons que si le recours spontané à ce type d'objet de la graphique permet de rationaliser l'énumération, il demande au préalable une interprétation pertinente des données du problème. Nous remarquons à ce

propos, et qui vient appuyer notre remarque, que les figures de ces deux exemples ne représentent pas le contexte sémantique : ce n'est pas une grille qui est dessinée ou un groupe d'enfants. Ces réponses représentent directement le traitement de la situation à l'aide d'un outil sémiotique approprié, ce qui demande déjà une certaine décontextualisation par rapport au contenu de l'énoncé.

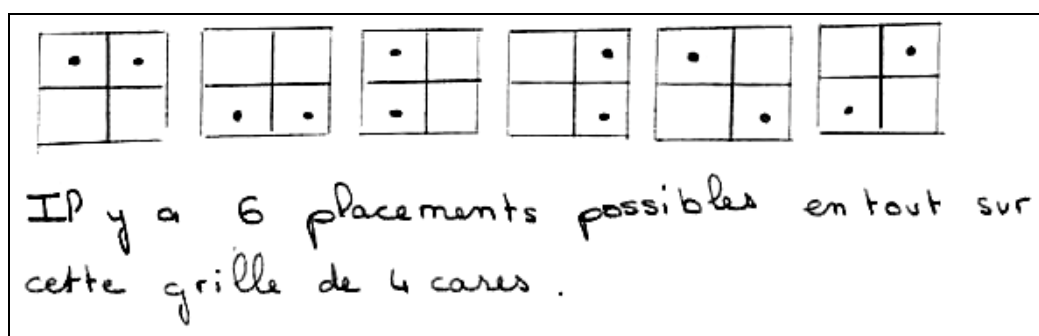
Il existe cependant des formes intermédiaires entre le tableau et la figure. Elles fonctionnent comme un tableau par juxtaposition des appariements possibles mais reste relativement contextualisée en représentant non seulement le traitement de la situation mais aussi les objets qui la constituent. Dans l'Exemple 12, les différentes parties du jeu des gendarmes et des voleurs sont inscrites dans le temps (puisque'il ne faut qu'une équipe de deux gendarmes pour jouer à chaque fois) et l'inventaire des appariements possibles est, par conséquent, représenté par étages successifs. Ici, le contexte est représenté puisque la réponse montre six fois de suite le groupe de 4 enfants qui jouent. Cet exemple est proche du tableau en ressemblant beaucoup à l'Exemple 10 dans son fonctionnement.



**Exemple 12 : Elève 284, problème Sél 4-20 n=4.**

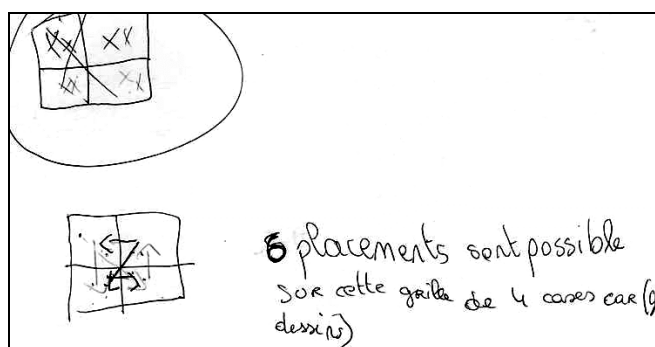
L'Exemple 13, relatif à Dis, présente la même façon une juxtaposition des possibles en étapes successives bien que la situation ne soit pas inscrite dans le temps : il ne peut y avoir que deux cases cochées à la fois sur la grille (alors que plusieurs groupes de deux randonneurs peuvent se saluer en même temps). Cette fois encore, et contrairement

à l'Exemple 10, le contexte est représenté par des dessins de grilles. Nous avons à la fois une représentation de la situation et de son traitement.



Exemple 13 : Elève 038, problème Dis 4-20  $n=4$ .

Une autre forme de traitement sémiotique était possible dans ce cas : certains élèves ont procédé à une énumération sur une seule figure représentant la grille. Cela donne quelque chose de proche d'un réseau circulaire (comme dans l'Exemple 8) qui serait inscrits dans une grille de quatre cases (Exemple 14). Cet exemple ne correspond donc plus du tout au fonctionnement d'un tableau.



Exemple 14 : Elève 311, problème Dis 20-4  $n=4$ .

## 2. Définition des classes de réponses

Pour aborder la manière dont les différentes sortes de réponses produites par les élèves se distribuent selon chaque modèle combinatoire implicite, il est avant tout nécessaire d'en établir une classification. Pour cela, nous les définissons par leur pertinence vis-à-vis de la question posée. L'analyse du corpus nous permet ainsi de distinguer (i) les réponses justes, (ii) les réponses intermédiaires supérieures et inférieures et (iii) les réponses fausses. Pour chacune de ces classes de réponse, nous présentons les procédures qui s'y associent.

Les réponses justes et intermédiaires sont regroupées dans la classe des réponses pertinentes dans la mesure où elles font l'objet d'une « activité combinatoire » telle que nous l'avons défini ci-dessus (p.41). Les réponses strictement fausses ne font pas apparaître les indices d'une activité combinatoire.

## **A. Les réponses justes**

Il est très simple de définir les réponses que l'on retiendra comme justes. Ces réponses présentent des inventaires complets et sans répétitions de combinaisons de 2 objets pris parmi  $n$ . Elles résultent bien souvent de la mise en œuvre de procédures spécifiques que nous décrivons à présent.

### **a. Procédures associées aux réponses justes**

La procédure la plus efficace est essentiellement l'énumération systématique. La réponse organisée par cette procédure est à la fois ordonnée (selon une disposition numérique, alphabétique ou spatiale) et régulière (la règle d'énumération se répète invariablement jusqu'à épuisement des possibles).

Cette procédure, si elle est correctement mise en œuvre, produit donc des inventaires exhaustifs et sans redondances. On l'observe sur des listes (Exemple 15, cf. p.60), ainsi que sur des figures (Exemple 6, cf. p.54) et des tableaux (Exemple 11, cf. p. 56). On peut l'associer à certaines formes de calculs (Exemple 16, cf. p. 61).

Nous avons relevé d'autres formes d'énumérations produisant des réponses justes : l'énumération corrigée, l'énumération partitive répétée, l'énumération circulaire complétée. Nous les présentons ci-dessous illustrées d'exemples de réponses justes.

#### **• *L'énumération systématique à élément constant***

Un certain nombre d'énumérations systématiques se font à partir d'éléments constants. C'est ce que l'on observe quand les élèves énumèrent dans l'ordre, et pour chaque objet de la collection, toutes les combinaisons possibles qu'ils peuvent constituer avec chacun des autres :

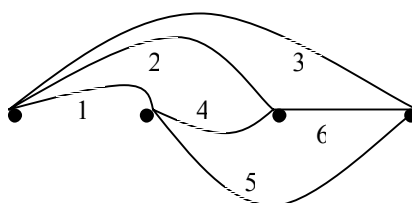
*Dans la collection (A, B, C, D), on fixe A et, on constitue  
dans l'ordre les groupes AB, AC et AD.*

Puis, on passe (dans l'ordre) à B que l'on fixe et on recommence l'énumération. Puis toujours dans l'ordre alphabétique, on passe à C que l'on fixe, etc.

Les équipes possibles différentes sont: AB - AC - AD  
BC - BD  
CD  
Il pourrait y avoir 6 équipes différentes avec ces enfants

Exemple 15 : Elève 073, problème Par 20-4 n=4.

Pour des réponses liées au registre de la graphique, les objets de la collection sont distingués, comme nous l'avons vu (sous III.1, p. 49.), par leur position dans le plan. L'énumération systématique avec élément constant utilise alors le caractère orienté du plan qui détermine ainsi un ordre (par exemple, de la gauche vers la droite) :



Cette énumération systématique peut être présentée sous la forme arithmétique  $n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1$ . L'Exemple 16, ci-dessous, montre que chaque terme de l'addition correspond au nombre de combinaisons possibles objet par objet. L'élève désigne par une expression ordonnée (« la première », « la seconde », « la troisième », etc.) chaque objet qui sert de repère et correspond à l'élément fixe de l'énumération sur liste :

« [...] la 1<sup>ère</sup> salue les 19 autres, la 2<sup>ème</sup> salue les 18 autres puisque la 1<sup>ère</sup> l'a saluée, la 3<sup>ème</sup> salue les 17 autres puisque la 1<sup>ère</sup> et la seconde l'ont déjà saluées, etc. »

$19+18+17+16+15+14+13+12+11+10+9+8+7+6+5+4$   
 $+3+2+1 = 190$ . Il y a 190 saluts qui sont échangés en  
 tout car chaque personne salut toutes les autres personnes.  
 Donc la 1<sup>ère</sup> saluts les 19 autres la 2<sup>ème</sup> saluts les 18  
 autres puisque la 1<sup>ère</sup> la saluée la 3<sup>ème</sup> saluts les 17  
 autres puisque la 1<sup>ère</sup> et la seconde de l'on déjà saluée  
 etc ...

**Exemple 16 : Elève 100, problème A<sub>slt</sub> 20-4  $n=20$ .**

L'énumération systématique à élément constant semble structurée selon la règle de la somme (cf. p. 39) puisque l'ensemble des appariements est ainsi déterminé par la juxtaposition d'un nombre de sous-ensembles exclusifs : dans une collection de  $n$  objets, on peut apparier de  $n-1$  façons un premier objet avec chacun des autres, ou de  $n-2$  façons un deuxième objet (puisque les appariements possibles avec le premier objet ont déjà été constitués) ou de  $n-3$  façons un troisième objet, etc.

**• L'énumération systématique associée aux règles du produit et du quotient**

D'autres énumérations systématiques semblent plutôt structurées selon la règle du produit (cf. p. 40) qui permet de dénombrer des couples : pour dénombrer des arrangements sans répétition de  $n$  objets pris 2 à 2, on peut choisir un premier objet puis un second de  $n*n-1$  façons différentes.

Comme il s'agit de dénombrer des combinaisons de 2 objets pris parmi  $n$ , l'élève qui établit une relation d'équivalence dans l'ensemble des configurations données (AB est équivalent à BA), applique la règle du quotient pour éliminer les appariements redondants (il divise par 2 le résultat obtenu :  $n*n-1/2$ ).

Ainsi, l'élève de l'Exemple 17 ci-dessous considère qu'il y a 19 façons de choisir le second objet quand on a choisi le premier (deuxième ligne de sa justification); il conclue, par conséquent, qu'il y a  $19*20$  configurations possibles avec les 20 objets de la collections (3<sup>ème</sup> ligne de sa justification). Il divise ensuite par deux le résultat trouvé pour corriger la réponse et éliminer les combinaisons redondantes (4<sup>ème</sup> ligne de sa justification).

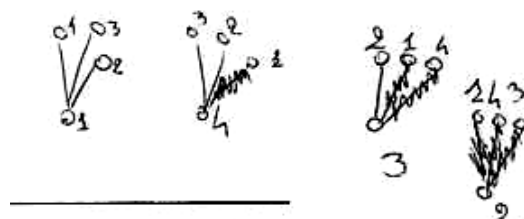


Il y a un salut entre 2 personnes  
 Une personne fait 19 saluts  
 $19 \text{ saluts} \times 20 \text{ personnes} = 380$   
 Ils y a 380 saluts échangés : 2

Exemple 17 : Elève 015, problème A<sub>slt</sub> 20-4  $n=20$ .

Cette énumération systématique structurée par les règles du produit et du quotient se retrouve dans les inventaires sur liste ou sur figures du registre de la graphique. Un certain nombre de réponses justes montrent ainsi sous différentes formes que les élèves énumèrent, dans un premier temps, tous les arrangements possibles de 2 objets parmi les  $n$ , puis, revenant à des combinaisons, ils corrigent le résultat obtenu en éliminant les répétitions.

L'Exemple 7, page 55, permet d'illustrer ce pont. La réponse est produite par la réalisation d'un diagramme en arbre. Chaque branche à partir d'un point renvoie à un des arrangements possibles de 4 objets pris 2 à 2. Voici un agrandissement de cet arbre :



Le début de l'explication écrite qui accompagne cette réponse le montre bien : « Il y a 12 possibilités car chaque enfant a 3 possibilités [...] ». La mise en œuvre d'un arbre n'est pas pertinente pour énumérer des combinaisons qui sont, par nature, non ordonnées. C'est un instrument sémiotique qui se prête plutôt aux arrangements et permutations. Cependant, l'élève élimine les énumérations redondantes en les barrant. La deuxième partie de l'explication montre qu'il tient compte du fait que les combinaisons ne sont pas ordonnées : « [...] mais il y a 6 répétitions. En fait il y a 6 possibilités. »

La figure située au centre de la réponse de cet élève (entre l'énumération en arbre et l'explication) est construite sous forme de réseau circulaire (cf. sous III.1.B, p.53) :



Elle montre un inventaire des possibles qui considère directement le caractère non ordonné des groupes : les objets sont uniquement représentés par des points et se distinguent uniquement par la place qu'ils occupent dans le plan. Les appariements sont signifiés par des courbes fermées autour de deux points (diagramme de Venn). Il n'est pas possible de décrire la procédure utilisée par l'élève pour le produire cela renforce l'idée que ce dernier dénombre bien des combinaisons en tant que configurations non ordonnées et non des arrangements – d'où l'élimination des branches redondantes de l'arbre.

• ***L'énumération partitive répétée***

Cette procédure n'est observée que dans les réponses aux problèmes  $n=4$  de notre protocole expérimental (où  $p=2$ ). Dans un premier temps, les élèves partagent la collection en deux groupes de deux objets. Puis il reprennent ce partage autrement jusqu'à avoir inventorié tous les possibles :

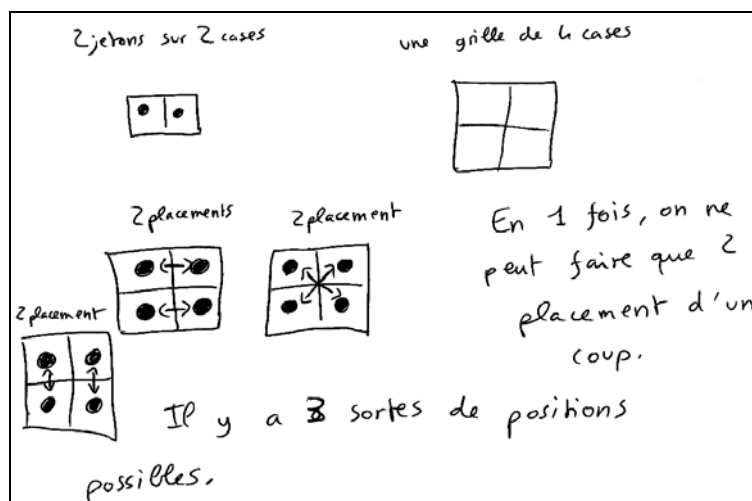
*Pour la collection (A, B, C, D),*

*d'abord la partition (AB ; CD).*

*Puis la partition (AC ; BD).*

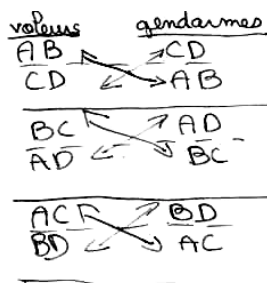
*Et, enfin, la partition (AD ; BC).*

Cette répétition de la règle initiale (partager la collection en deux groupes) peut être organisée systématiquement à partir d'éléments constants selon un ordre alphabétique, numéral ou spatial afin d'assurer l'exhaustivité du dénombrement. Dans l'Exemple 18, l'inventaire est exhaustif puisque l'application de la règle se fait en suivant méthodiquement chacun des axes possibles de la figure (horizontal, vertical, oblique). L'élève utilise les propriétés spatiales d'ordre et d'orientation de la figure inscrite dans le plan, pour organiser méthodiquement l'énumération.



Exemple 18 : Elève 125, problème Dis 4-20  $n=4$ .

Dans l'Exemple 1, page 50 (reproduit ci-dessous), le partage de la collection en deux groupes est facilité par la nature même de la situation car le modèle combinatoire implicite qui la caractérise est la partition (Par). Elle est constituée d'un groupe de deux gendarmes et d'un groupe de deux voleurs. L'inventaire se fait ici en deux temps : un temps pour séparer la collection en deux sous collections (AB – CD), suivi d'un temps d'inversion des groupes ainsi constitués (CD – AB) :



L'élève présente ainsi une énumération selon trois inversions de groupes. Le passage de l'une à l'autre aurait pu s'organiser selon la procédure « élément constant » dans l'ordre alphabétique (AB, AC, AD). Cela aurait produit cet inventaire :

- D'abord : **AB** – CD / CD – AB
- Puis : **AC** – BD / BD – AC
- Enfin : **AD** – BC / BC – AD

Mais le recours à un ordre alphabétique, numéral ou spatial pour assurer l'exhaustivité du dénombrement ne semble pas indispensable compte tenu du nombre

peu important de données à traiter. C'est apparemment le cas de l'Exemple 19 qui produit un inventaire non ordonné :

« le 1 avec 4 ; 2 avec 3 ;

3 avec 4 ; 1 avec 2 ;


le 2 avec le 4 ; le 1 avec le 3. »

enfant 1 , enfant 2 , enfant 3 , enfant 4  
on met  
le 1 avec 4 ; 2 avec 3 ; 3 avec 4 ; 1 avec 2 ; le 2 avec le 4 ; le 1 avec le 3  
on peut faire 6 répartitions différentes.

Exemple 19 : Elève 144, problème Par 20-4  $n=4$ .

### • *Énumération circulaire complétée d'une énumération systématique*

Un certain nombre de réponses montrent que les sujets ont opéré dans un premier temps à une énumération circulaire (cf. ci-dessous, p. 84). Puis, ils complètent la réponse en mettant en œuvre une même énumération systématique afin d'assurer l'exhaustivité du dénombrement.

la réponse peut varier car :  
Si les points sont alignés on peut en compter 190 différents :  
On observe le schéma représenté en bas : on calcule d'abord les segments rapprochés : AB-BC-CD-DE...TU. Il y en a 19.  
- ensuite on déduit à chaque fois le nombre de segment qui n'a pas déjà été cité : pour A il y a 18 segments (19 - le segment AB déjà cité) ; pour B il y a 17 segments (19 - les segments AB et BC déjà cités) ; ... comme ça jusqu'à T.  
AB-BC-CD... TU = 19 segments.  
AC-AD-AE... AT = 18 segments.  
BD-BE... BT = 17 segments.  
CE-CF... CT = 16 segments...  


Exemple 20 : Elève 036, problème A<sub>sgm</sub> 20-4  $n=20$ .

Cet exemple montre que l'élève a procédé à une énumération circulaire concerne les 19 premiers segments possibles qu'il appelle « *segments rapprochés* » (3<sup>ème</sup> ligne de son explication). Puis il met en œuvre une énumération systématique pour les 18, 17 et 16 segments possibles suivants.

L'explication qu'il donne est illustrée par un inventaire sur liste (interrompue) et sur figure :

« *AB-BC-CD... TU = 19 segments.*

*AC-AD-AE... AT = 18 segments.*

*BD-BE...BT = 17 segments.*

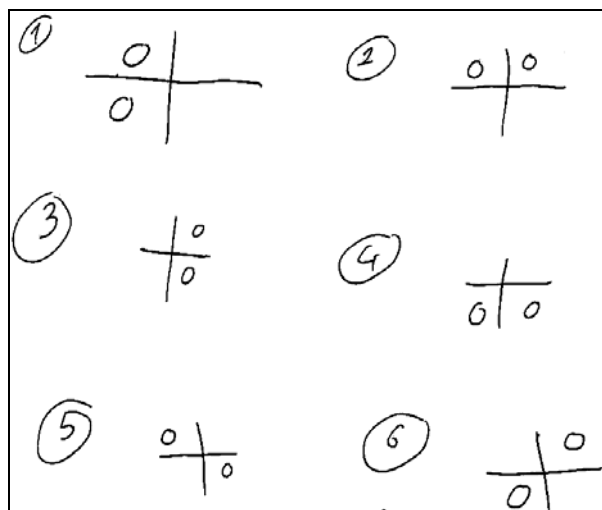
*CE-CF... CT = 16 segments... »*



La première ligne d'inventaire suit bien une énumération circulaire alors que les trois autres sont régies par une énumération systématique avec élément constant.

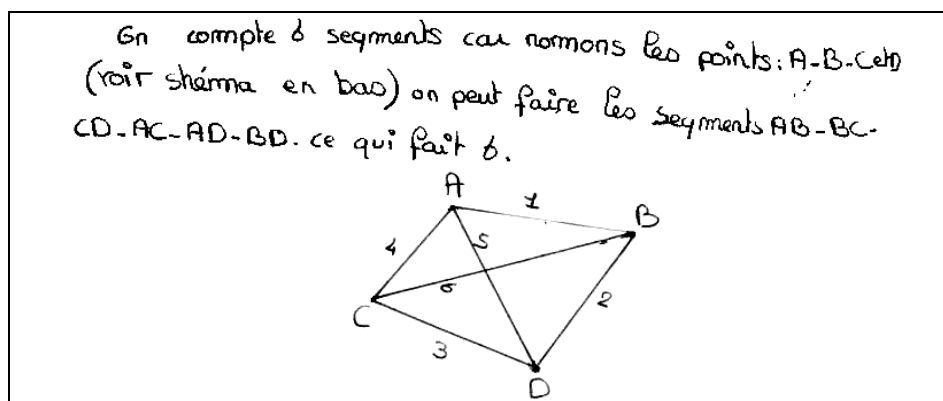
En faisant l'hypothèse que l'inventaire sur la figure suive les mêmes règles que celles qui organisent l'inventaire sur liste, il est possible de penser que le sujet a commencé par une énumération circulaire suivie d'un comptage des groupes possibles de façon manuelle selon l'énumération systématique. Le résultat donné (190 segments possibles) est juste et atteste donc que cet inventaire complémentaire a été correctement mené. Sans cette organisation du dénombrement, la complexité de l'activité n'aurait pas permis de trouver la réponse attendue.

Pour  $n=4$ , l'inventaire complémentaire est très simple et ne nécessite pas d'organisation particulière. L'Exemple 21 présente certainement une énumération circulaire initiale aux étapes 1 à 4 ; elle est complétée aux étapes 5 et 6.



Exemple 21 : Elève 129, problème Dis 4-20  $n=4$ .

Pour les problèmes  $A_{\text{sgm}}$ , on remarque que les élèves de notre échantillon assimilent souvent les segments possibles à dénombrer aux côtés d'un quadrilatère et à ses diagonales (cf. Exemple 24). La mise en oeuvre de l'énumération circulaire et systématique semble structurée par une géométrisation de la situation : les quadrilatères sont tracés par leurs côtés selon l'ordre ABCD - les diagonales faisant l'objet d'un second traçage. Voici un exemple :



Exemple 22 : Elève 036, problème  $A_{\text{sgm}}$  20-4  $n=4$

La numérotation des segments de la figure tracée permet de penser qu'il s'agit d'une énumération relevant certainement du type « circulaire complétée ». Il n'est pas possible de dire si l'élève a produit cette figure selon cette procédure mais c'est bien elle qu'il utilise pour distinguer et, certainement, dénombrer les configurations possibles.

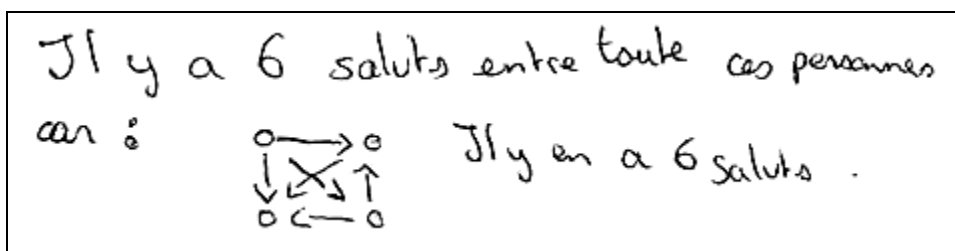
### b. Remarques relatives aux réponses justes

Deux types de réponses se distinguent dans notre corpus : (i) celles dont le résultat est juste mais qui ne présentent aucune procédure visible, aucun élément justificatif et (ii) celles qui présentent une procédure pertinente mais donnent un résultat faux. Le problème qui se pose à leur égard est de pouvoir justifier leur appartenance à la classe des réponses justes.

#### • *Résultats justes, procédure inconnue*

Un certain nombre de réponses justes ne permettent pas de déterminer la procédure, s'il y en a une, qui a été mise en œuvre par le sujet. Bien que les réponses soient acceptables, il nous est impossible de les classer parmi les procédures précédentes.

Cependant, du fait que le résultat est juste et qu'il existe des indices évidents d'élaboration de la réponse (énumérations sur liste ou sur schéma), il semble difficile de ne pas les considérer comme des réponses justes. Ainsi, quand  $n=4$  les sujets peuvent conduire leur énumération assez facilement sans organisation spécifique puisque la situation est peu complexe à traiter. Sur petit effectif, l'énumération peut donner des réponses justes tant que la figure qui sert de support reste lisible comme dans l'exemple ci-dessous :



Exemple 23 : Elève 301, problème A<sub>sls</sub> 4-20  $n=4$ .

Comme nous l'avons montré dans la section précédente, quelques réponses montrent explicitement que les élèves qui les ont produites semblent s'être appuyés sur la figure d'un quadrilatère pour inventorier les possibles comme nous l'avons vu pour l'énumération circulaire et systématique. Ils assimilent les objets de la collection aux sommets et les groupes possibles aux côtés et diagonales de la figure comme le montre l'exemple suivant :

« En tout, on peut tracer 6 segments, car n'importe comment, ces 4 points formeront une fois reliés un quadrilatère et ses diagonales [...] »

En tout, on peut tracer 6 segments, car n'importe comment, ces 4 points formeront une fois reliés un quadrilatère et ses diagonales, à part s'il sont alignés mais cela gere 6 quand même

Exemple 24 : Elève 025, problème  $A_{sgm}$  4-20  $n=4$ .

Il n'est pas surprenant que ce soit principalement le problème associé à  $A_{sgm}$  qui induise cette interprétation de la situation en terme de quadrilatère puisque l'énoncé se réfère expressément à des objets de géométrie avec les notions de points et de segments. Cependant, certains élèves ne travaillant pas sur le problème  $A_{sgm}$  font tout de même référence au quadrilatère en introduisant une analogie dans leur réponse. L'Exemple 25 ci-dessous montre clairement que l'élève assimile la grille à un carré : « [...] comme c'est une grille de quatre cases, les côtés forment un carré [...] ».

Réponse : On peut faire 6 "placements" car, comme c'est une grille de quatre cases, les côtés forment un carré ce qui nous permet déjà de faire quatre "placements" et, grâce aux diagonales, on en trouve deux autres.

Exemple 25 : Elève 245, problème Dis 4-20,  $n=4$ .

Cet exemple peut présenter par certains côtés à ce que Douady (1984 et 1986) appelle un changement de cadre :

*Le changement de cadres est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en œuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. (Ibid., p. 11)*

Dans une autre approche théorique, Duval (1988) décrit en terme de changement de registre sémiotique des processus qui paraissent similaires. Son explication demande de distinguer dans le signe le sens de la référence. Le sens étant lié au registre de description, deux expressions de même référence peuvent ainsi se substituer sans que la



valeur de vérité change. Ce processus de substitution présente pour Duval des avantages certains :

*Un simple changement d'écriture permet d'exhiber des propriétés différentes du même objet, tout en conservant la référence. (Ibid., p. 7)*

Ainsi, l'assimilation d'un groupe de quatre personnes ou d'une grille de quatre cases à un quadrilatère permet de repérer les configurations à dénombrer à partir des propriétés de cet objet de géométrie : 4 côtés et 2 diagonales, donc 6 segments.

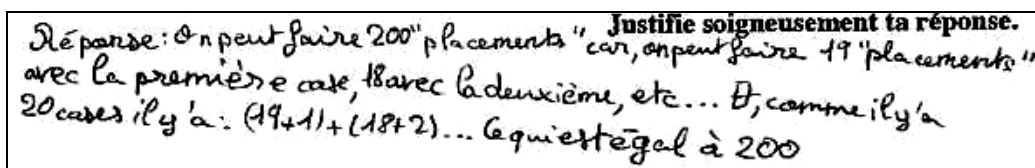
Cependant, dans l'ensemble des réponses juste recueillies aux problèmes  $n=4$  mais de procédure inconnue, nous n'avons pas observé suffisamment de cas explicites de recours à ce procédé. Nous ne pouvons donc définir une nouvelle classe procédurale pour regrouper ces réponses.

#### • *Procédures pertinentes mais résultats faux*

Une énumération organisée selon une procédure pertinente peut donner un résultat faux si elle n'est pas correctement mise en œuvre. Dans ce cas, en distinguant la réponse élaborée du résultat calculé, nous ne tenons compte que de la pertinence de la procédure observée.

Voici un exemple de résultat faux au niveau de l'organisation du calcul mais que nous qualifions quand même de réponse juste puisqu'elle met bien en œuvre une procédure d'énumération systématique :

*« Réponse : On peut faire 200 « placements » car on peut faire 19 « placements » avec la première case, 18 avec la deuxième, etc. Et comme il y a 20 cases, il y a :  $(19+1) + (18+2) + \dots$  Ce qui est égal à 200. »*



Justifie soigneusement ta réponse.  
Réponse : On peut faire 200 "placements" car, on peut faire 19 "placements" avec la première case, 18 avec la deuxième, etc... Et, comme il y a 20 cases il y a :  $(19+1) + (18+2) \dots$  Ce qui est égal à 200

Exemple 26 : Elève 245, problème Dis 4-20  $n=20$ .

Cet élève dénombre bien les combinaisons possibles de 2 objets pris parmi 20 selon une procédure que nous avons définie ci-dessus comme systématique à élément constant :  $19 + 18 + 17 + \dots + 2 + 1$ . Cette réponse est donc juste même si le résultat du

calcul est faux. Pour organiser son calcul, il associe les termes extrêmes de l'addition dont la somme fait invariablement 20 de la façon suivante :  $19 + 1 = 20$ ,  $18 + 2 = 20$ , etc. Cependant, après les deux premiers, il cesse son écriture en pensant certainement qu'il y a dix opérations de la sorte sans se rendre compte que le dernier terme n'est pas égale à 20, mais à 10 :  $(19+1) + (18+2) + (17+3) + (16+4) + (15+5) + (14+6) + (13+7) + (12+8) + (11+9) + 10$ . Il trouve ainsi 200 qui est un résultat faux puisqu'il devait trouver 190 placements possibles. Comme l'erreur se situe au niveau de l'organisation du calcul et non pas au niveau de la conception de la réponse, nous classons finalement ce travail comme réponse juste.

## **B. Les réponses intermédiaires supérieures**

Un certain nombre de réponses relèvent bien d'une activité combinatoire. Rappelons que nous avons définie cette dernière (cf. p.41) comme une activité spécifique qui, selon les situations, énumère et dénombre, d'une façon ou d'une autre, des arrangements, des permutations ou de combinaisons. Cependant, certaines réponses présentent des erreurs liées à la présence de configurations ordonnées comme s'il fallait dénombrer des arrangements mais aussi des configurations constituées du même objet.

### **a. Énumération d'arrangements**

Un certain nombre de sujets mettent en œuvre une énumération qui inventorie des configurations ordonnées (AB distinct de BA). Ce type de réponse renvoie plutôt à la notion de couples (sans répétitions) d'un produit cartésien  $E \times E$  et non à celle de parties 2 à 2 d'un ensemble de  $n$  éléments. L'Exemple 27 présente ainsi un inventaire qui présente des répétitions puisque dans la liste produite, chaque occurrence est comptée deux fois (« 1 à 2 » est distingué de « 2 à 1 »).

Exemple 27 : Elève 001, problème A<sub>slt</sub> 4-20  $n=4$ .

Les réponses sous forme du calcul  $n*(n-1)$ , comme l'Exemple 28, présentent la même erreur en comptabilisant deux fois chaque groupe et correspond donc à l'énumération d'arrangements.

1 enfant joue 19 fois, il y a 20 enfants  
on fait donc  $19 \times 20 = 389$   
on peut faire 389 répartitions différentes

Exemple 28 : Elève 061, problème Par 4-20  $n=20$ .

« 1 enfant joue 19 fois, il y a 20 enfants.

On fait donc  $19 \times 20 = 389$

On peut faire 389 répartitions différentes. »

Ce type d'erreur a été relevé par Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (ibid.) sous le terme d'ORDRE (cf. sous II.3.C, p. 44)

### b. Enumération de combinaisons avec répétitions

Ce type d'erreur a aussi été observé par Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (ibid.) sous le terme de REPETITION. L'Exemple 29 présente une solution pour la-

quelle l'élève met en œuvre une procédure additive dont le premier terme est  $n$  et non  $n-1$  comme s'il fallait dénombrer des combinaisons avec répétition : si le premier des  $n$  objets de la collection est apparié à  $n$  objets, c'est donc qu'il est aussi apparié avec lui-même.

chaque enfant va avec ~~20~~ 20 partenaires mais le nombre diminue chaque fois.

$$90 + 19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =$$

Exemple 29 : Elève 154, problème Sél 4-20  $n=20$ .

C'est encore le cas pour l'Exemple 30 qui présente cette fois une procédure multiplicative : l'élève multiplie chacun des 20 objets par 20 possibilités d'appariements au sien de la collection (alors qu'ils n'ont chacun que 19 possibilités pour constituer des combinaisons sans répétitions), avant de diviser le tout par deux ( $20 \times 20 / 2$ ).

Quand 20 personnes se rencontrent :

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 20 \\ \hline 400 \\ \hline 400 \\ \hline 800 \end{array}$$

il est échangé : 200 saluts

$$\begin{array}{r} 400 \overline{) 800} \\ \underline{800} \\ 0 \end{array}$$

Exemple 30 : Elève 012, problème A<sub>slt</sub> 20-4  $n=20$ .

L'Exemple 31 est encore plus représentatif de cette erreur. L'inventaire est produit sur liste selon une énumération systématique à élément constant mais il présente explicitement les appariements erronés : «  $A$  avec  $A$  [...] Puis  $B$  avec  $B$  [...] ».

des enfants s'appellent A, B, C, D.

Donc on aura A avec A  
 " avec B  
 " " C  
 " " D

Puis B avec B  
 " C  
 " D

Ensuite C avec C  
 " D

Enfin D avec D

Il y aura donc 10 possibilités.

Exemple 31 : Elève 199, problème Par 4-20  $n=4$ .

### c. Dénombrement d'arrangements avec répétitions

Certaines réponses cumulent ces deux types d'erreurs. Voici un exemple :

$20 \times 20 = 480$   
 Donc ils se sont serrer la main 480 fois

Exemple 32 : Elève 002, problème A<sub>slt</sub> 4-20  $n=20$ .

Cet élève répond en faisant  $20 \times 20$  au lieu de  $19 \times 20 / 2$ . De cette façon, il dénombre des arrangements avec répétitions.

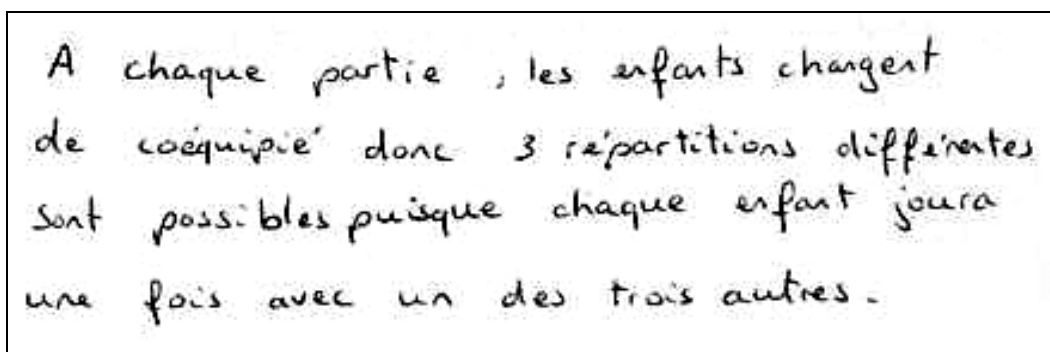
## C. Les réponses intermédiaires inférieures

Les énumérations que nous désignons comme intermédiaires inférieures sont peu ou mal organisées. Elles se distinguent des réponses complètement fausses dans le sens où elles relèvent encore d'une activité combinatoire : l'élève cherche à énumérer des configurations combinatoires possibles. Voici les principaux types de réponses tirés de notre corpus.

### a. Enumération systématique limitée au premier objet

Ces réponses ressemblent à des énumérations systématiques inachevées. L'élève considère bien que le premier objet peut constituer une combinaison possible avec chacun des autres mais il ne généralise pas cette règle à l'ensemble des objets de la collection. En voici deux exemples :

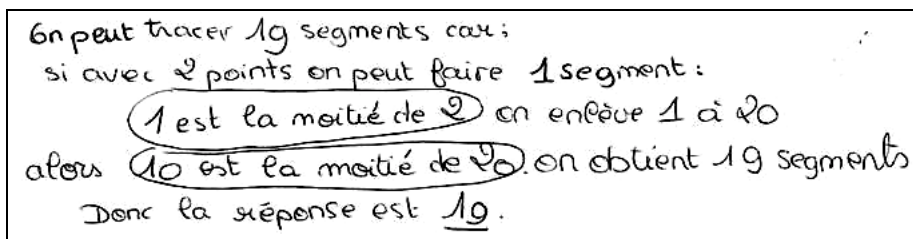
*« A chaque partie, les enfants changent de coéquipier donc 3 répartitions différentes sont possibles puisque chaque enfant jouera une fois avec un des trois autres. »*



A chaque partie, les enfants changent de coéquipier donc 3 répartitions différentes sont possibles puisque chaque enfant jouera une fois avec un des trois autres.

Exemple 33 : Elève 143, problème Par 4-20  $n=4$ .

*« On peut tracer 19 segments car si avec 2 points on peut faire 1 segment, [...] on enlève 1 à 20 (pour l'apparier aux autres) alors [...] on obtient 19 segments. Donc la réponse est 19. »*

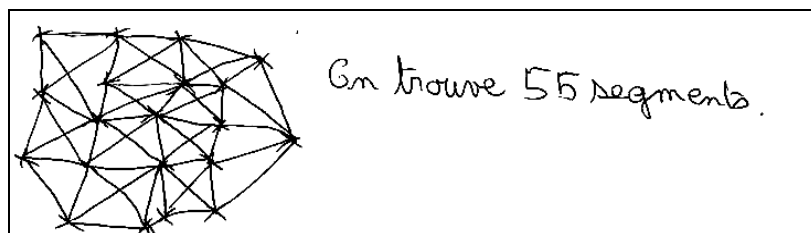


On peut tracer 19 segments car :  
si avec 2 points on peut faire 1 segment :  
1 est la moitié de 2 on enlève 1 à 20  
alors 10 est la moitié de 20 on obtient 19 segments  
Donc la réponse est 19.

Exemple 34 : Elève 118, problème Asgm 20-4  $n=20$ .

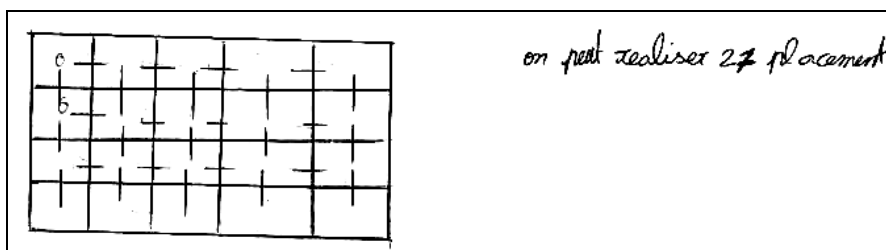
### b. Subordination à une structure énumérative locale

Certains élèves, essentiellement quand  $n=20$ , ont représenté les objets de la collection par des points et les ont disposés dans le plan de manière assez organisée (en lignes et colonnes). Puis ils ont relié chaque point, de façon locale, aux points les plus proches comme le montre l'Exemple 35.

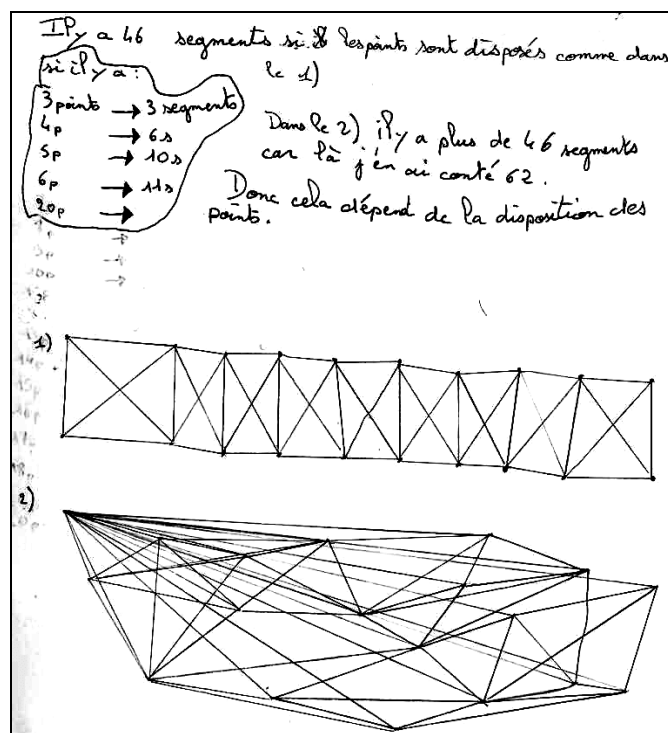


Exemple 35 : Elève 035, problème  $A_{sgm}$  20-4  $n=20$ .

Ces inventaires sur figure portent bien sur des combinaisons de 2 objets pris parmi 20. Ils demeurent cependant incomplets du fait qu'ils sont subordonnés à une structure énumérative simple et répétée sans concevoir d'exhaustivité à l'ensemble de la collection (Exemple 35, Exemple 36 et Exemple 37, figure au milieu de la réponse de l'élève).




Exemple 36 : Elève 039, problème Dis 4-20  $n=20$ .



Exemple 37 : Elève 033, problème  $A_{sgm}$  20-4  $n=20$ .

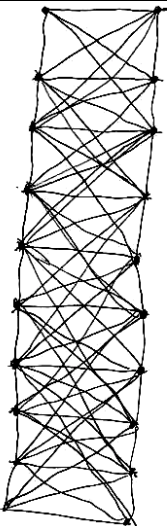
### c. Enumérations difficiles à produire et à contrôler

Les erreurs d'énumération peuvent aussi relever de la difficulté d'en contrôler l'exhaustivité par surcharge de la figure comme l'Exemple 38 malgré que l'élève ait utilisé 5 couleurs différentes pour distinguer les combinaisons qu'il inventorie (il en trouve 7 noirs, 7 roses, 6 verts, 5 jaunes et 5 rouges). Elles peuvent encore provenir d'énumérations sur réseaux inorganisés (Exemple 37, figure du bas) ou de l'impossibilité de tout inventorier (malgré un début de systémativité dans l'énumération) du fait même de contraintes liées à une disposition peu pratique des points dans le plan (Exemple 39).



- les 0 représentent les 20 enfants  
 - les 7 7 6 5 5 représentent les groupes de 2.  
 • il y a 30 possibilités (d'après moi).

Exemple 38 : Elève 075, problème Par 20-4  $n=4$ .



Si il y a un  
 segment par 2 points  
 alors il y a 190 segments  
 par 20 points

Exemple 39 : Elève 024, problème A<sub>sgm</sub> 20-4  $n=20$ .

A la différence de la subordination à une structure énumérative locale présentée ci-dessus, il y a une tentative d'exhaustivité de l'énumération mais qui n'est pas effective du fait d'une organisation peu commode de la figure. Dans ce genre de situation, un réseau circulaire serait plus approprié (cf. III.1.B, p. 53). Ce dernier présente une dispo-



sition dans le plan qui facilite une mise en relation entre tous les points. Cependant, le recours à un réseau circulaire dénote certainement une interprétation plus juste de la situation – interprétation qui anticipe la systématique de l'énumération. En contre partie, la figure de l'Exemple 39 présente une disposition initiale qui renvoie plutôt à une interprétation de l'énoncé proche de celle qui génère une procédure partitive (cf. ci-dessous, p. 83).

Certaines de ces réponses sont proches d'erreurs relevées par Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (cf. sous II.3.C, p. 44) concernant des énumérations sans systématisme, par essai et erreur (LISTE).

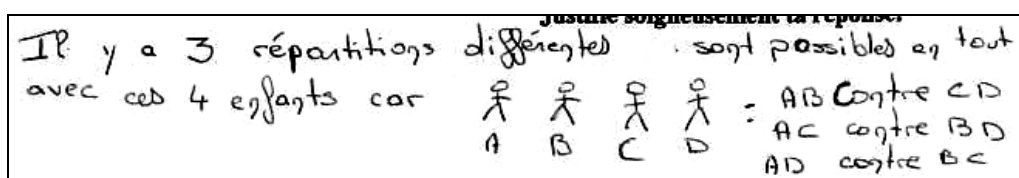
#### d. Énumération incomplète par perte du référent

L'Exemple 40 montre une énumération lacunaire du fait même du caractère de la situation qui renvoie au modèle combinatoire implicite des partitions : l'élève fait sa répartition en deux groupes, les gendarmes et les voleurs et procède à une énumération selon une procédure partitive répétée :

« *AB contre CD*

*AC contre BD*

*AD contre BC »*



Exemple 40 : Elève 055, problème Par 4-20  $n=4$ .

L'inventaire est complet, il s'arrête puisque toutes les combinaisons possibles sont énumérées indépendamment du référent puisque l'élève ne tient pas compte du fait que les équipes ainsi produites sont des gendarmes ou des voleurs. Il semble oublier cet aspect de la situation et oublie de comptabiliser en tant que « gendarmes » les groupes énumérés comme « voleurs ».

### e. Énumération incomplète d'arrangements

Quelques rares élèves organisent leur énumération uniquement à partir du premier et du dernier objet de la collection :

*A avec B,*

*A avec C,*

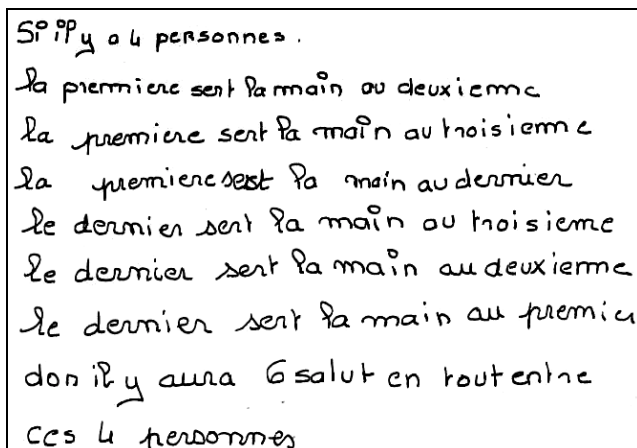
*A avec D,*

*D avec C,*

*D avec B,*

*D avec A.*

Une telle procédure ne permet pas d'inventaires exhaustifs et sans répétitions puisque'une combinaison est oubliée (B, C) et une autre est comptée deux fois : (A, D) et (D, A). En voici un exemple :



S'il y a 4 personnes .  
la première sert la main au deuxième  
la première sert la main au troisième  
la première sert la main au dernier  
le dernier sert la main au troisième  
le dernier sert la main au deuxième  
le dernier sert la main au premier  
don il y aura 6 saluts en tout entre  
ces 4 personnes

Exemple 41 : Elève 007, problème A<sub>slt</sub> 4-20  $n=4$ .

« S'il y a 4 personnes,

*la première serre la main au deuxième*

*la première serre la main au troisième*

*la première serre la main au dernier*

*le dernier serre la main au troisième*

*le dernier serre la main au deuxième*

*le dernier serre la main au premier*

*donc il y aura 6 saluts en tout entre ces personnes. »*

#### **f. Mise en œuvre des propriétés de la proportionnalité**

Un certain nombre de réponses à  $n=20$  montrent que les élèves qui les ont produites ont eu recours aux propriétés de la proportionnalité. Ils utilisent une procédure scalaire<sup>9</sup> avec soit l'application directe du coefficient (Exemple 42), soit en procédant de proche en proche (Exemple 43).

Dans le premier cas, l'élève pense qu'il y a 5 fois plus de combinaisons possibles de 20 objets pris 2 à 2 puisqu'il y a 5 fois plus d'objets avec une collection de 20 objets qu'avec une collection de 4.

On sait que avec 4 enfants, on peut faire 6 équipes différentes de gendarmes  
Or ici il est question de 20 enfants

nb. d'enfants	4	20
nb. d'équipes	6	30

$\times 5$

Donc 30 équipes différentes de gendarmes sont possibles en tout avec ces 20 enfants !

Exemple 42 : Elève 081, problème Sél 4-20  $n=20$ .

Dans le second cas, l'élève procède de 4 objets en 4 objets (dont il sait que cela constitue à chaque fois 6 combinaisons possibles de 4 objets pris 2 à 2) jusqu'à arriver à l'effectif de la collection (20 objets) :

*« Si pour 4 cases, il y a 6 placements*

*pour 8 cases, il y en a le double, 12 placements*

*pour 12 cases, il y en a le triple, soit 18 placements*

*pour 16 cases, il y a 24 placements*

*Et enfin pour 20 cases, il y a 30 placements »*

<sup>9</sup> Nous n'avons jamais pu relever avec certitude de recours à une procédure fonction.

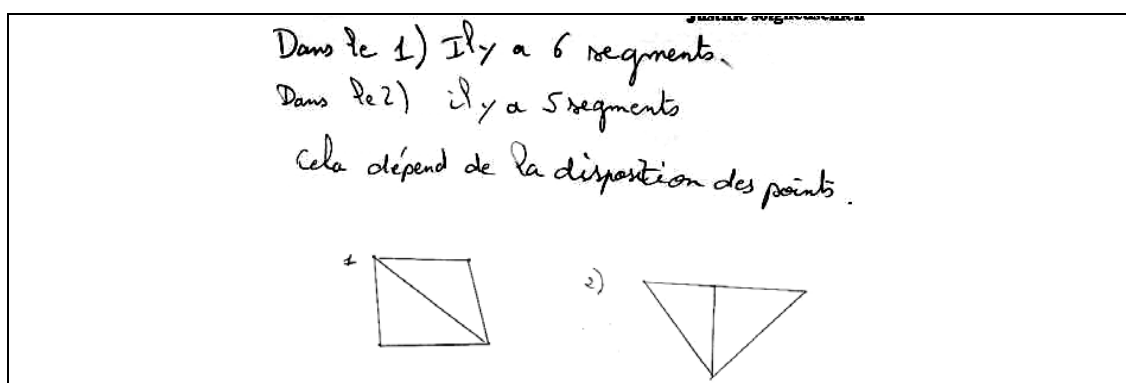
si pour 4 cases, il y a 6 placements  
 pour 8 cases, il y en a le double, 12 placements  
 pour 12 cases, il y en a le triple soit 18 placements  
 pour 16 cases, il y a 24 placements  
 Et enfin pour 20 cases, il y a 30 placements

Exemple 43 : Elève 040, problème Dis 4-20  $n=20$ .

Ces réponses sont, bien entendu, fausses puisque le nombre de combinaisons possibles ne croît pas proportionnellement à l'effectif de la collection. Elles entrent cependant dans le cadre des « réponses intermédiaires » puisque la relation de base (à 4 objets, 6 groupes possibles) est juste. Cependant, ces élèves semblent déconcertés du fait du saut informationnel lié au passage de  $n=4$  à  $n=20$ . Ils abandonnent la réalité de la situation et appliquent alors de façon non justifiée un outil mathématique dont ils disposent. Ce recours abusif à la proportionnalité n'est pas surprenant puisqu'ils pratiquent cette notion en classe depuis quatre ou cinq ans. Ainsi, les élèves de notre échantillon qui ont recours à la proportionnalité, s'ils en maîtrisent relativement bien les techniques, ne semblent cependant pas savoir si une situation relève bien de cette notion.

### g. L'influence de la position des points

Nous avons enfin observé que, pour quelques rares élèves, le nombre de configurations possibles est fonction de la position des points. Voici un exemple :



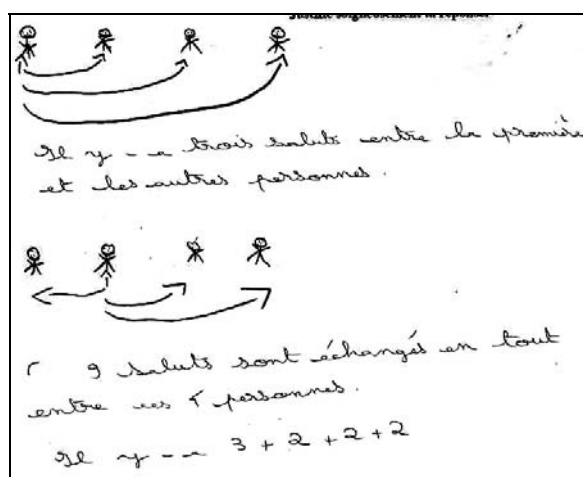
Exemple 44 : Elève 033, problème A<sub>sgm</sub> 20-4  $n=4$ .

Cet élève dispose, dans sa deuxième figure, 3 de ses 4 points sur une ligne. Il lui est alors impossible de concevoir un segment entre le premier et le troisième des points alignés. Il est certainement influencé de façon importante par la perception de la situa-

tion qu'en donne la représentation sous forme de figure. Il ne conçoit pas la transitivité suivante : s'il est possible de faire un segment avec les points A et B et un autre avec les points B et C, alors il est possible de faire un segment avec les points A et C quelque soit leurs positions respectives.

### h. Réponses approximatives

L'Exemple 45 semble proche de l'énumération systématique mais échoue, certainement du fait d'une analyse incomplète de la situation. Nous trouvons ainsi quelques cas de réponses approximatives au problème posé, bien que les élèves énumèrent encore des combinaisons. Ce type d'erreur semble très proche de ce que Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (ibid.) ont relevé comme réponses intuitives, spontanées et sans justifications (REPONSES INTUITIVES, cf. sous II.3.C, p. 44). Il est possible que ces réponses peu élaborées relèvent directement de ce que Fischbein (1975) évoque avec la notion d'intuitions combinatoires primaires (non issue d'un apprentissage spécifique) : ces processus cognitifs qui interviennent directement dans l'action du fait de leurs caractéristiques d'immédiateté, de globalisation, d'extrapolation et d'évidence, sont la plupart du temps insuffisantes pour maîtriser une situation.



Exemple 45 : Elève 300, problème A<sub>slt</sub> 4-20  $n=4$ .

### D. Les réponses fausses

Les réponses que nous qualifions de strictement de fausses ne relèvent pas d'une activité combinatoire apparente. Leur analyse nous a permis de distinguer deux procédures spécifiques : l'énumération partitive et l'énumération circulaire. Cependant, beau-

coup de réponses fausses présentent peu d'organisation spécifique et les justifications, quand il y en a, sont très pauvres et, pour ainsi dire, inexploitable. Ces réponses semblent dénoter de la part des élèves une incapacité à élaborer une représentation cohérente des problèmes posés. Nous les présentons à la suite.

### a. Énumération partitive

Un certain nombre de réponses peuvent être regroupées parce qu'elles relèvent d'une énumération partitive : contrairement à l'énumération partitive répétée qui relève des réponses justes (cf. p. 63) les élèves ont procédé, dans ce cas, à une seule partition de la collection en paires :

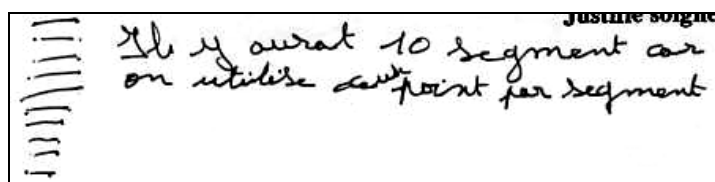
*AB*

*CD*

*EF*

*etc.*

Cette procédure ne permet pas de produire un inventaire exhaustif de combinaisons de 2 objets pris parmi  $n$ . L'exemple suivant montre un élève qui procède à un inventaire sur figure. Il juxtapose verticalement 10 segments et justifie de la manière suivante : « *Il y aura 10 segments car on utilise deux points par segment.* »



Exemple 46 : Elève 027, A<sub>sgm</sub> 20-4  $n=20$ .

Si l'Exemple 46 présente une réalisation de cette procédure sous forme d'inventaire sur figure, il existe des réalisations sous forme de calcul. Les élèves utilisent alors la division par deux comme le montre l'Exemple 47 : « *On peut faire 2 placements différents de jetons car comme pour la page précédente, ce sont encore des paquets. C'est comme si on faisait  $4 : 2 = 2$ .* » La solution alors proposée consiste bien à énumérer des groupes juxtaposés de 2 objets comme dans l'exemple précédent.

1 <sup>er</sup> placement	○	○
2 <sup>ème</sup> placement	○	○

On peut faire 2 placements différents de jetons car comme pour la page précédente ce sont encore des paquets. C'est comme si on faisait  $4 \div 2 = 2$ .

Exemple 47 : Elève 052, problème Dis 20-4.

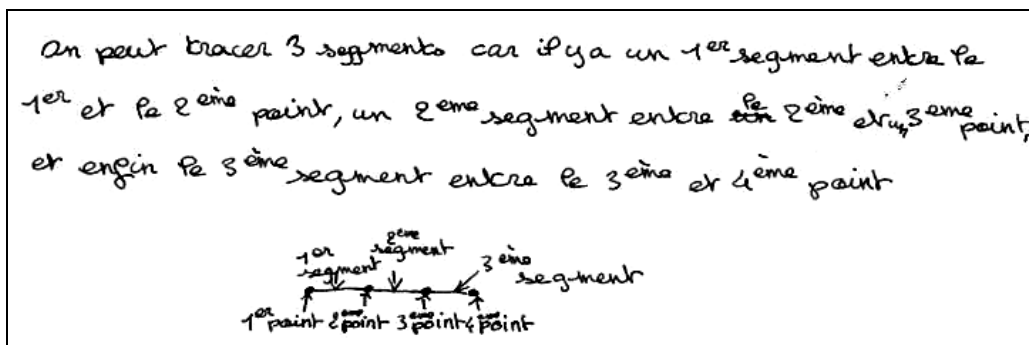
Cette erreur a été relevée par Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (ibid.) en terme de mauvaise interprétation de l'énoncé (ENONCE, cf. sous II.3.C, p. 44) : les élèves interprètent ici l'énoncé non pas en terme de combinaisons mais de partition. Cet auteur explique que ce sont les termes « distribuer », « diviser », « couper » qui induiraient une réponse partitive. Ces verbes étant absents de nos problèmes (on parle d'équipes, de répartir en équipes, de placements, de salutations), il semblerait que ce type d'erreur pourraient aussi provenir d'une conception générale de la situation, de l'activation opportuniste et non pertinente d'un schème partitif. Cette conception erronée pourrait aussi se voir renforcée par certains mots de l'énoncé, quand ils y sont.

#### b. Enumération circulaire

Certains élèves procèdent à une énumération circulaire. Elle consiste à relier chaque objet au suivant. Les élèves utilisent alors le second objet du groupe précédent comme premier objet du groupe suivant :

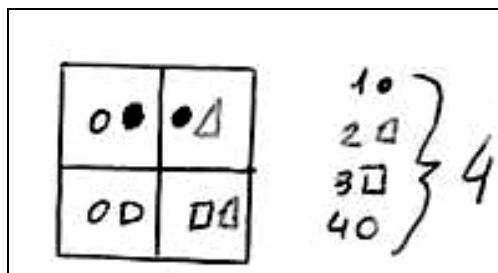
*Dans la collection (A, B, C, D) on produit AB, BC, CD  
(et, éventuellement, DA).*

Cette procédure ne permet pas de produire un inventaire exhaustif des groupes 2 à 2 possibles. Voici trois exemples :



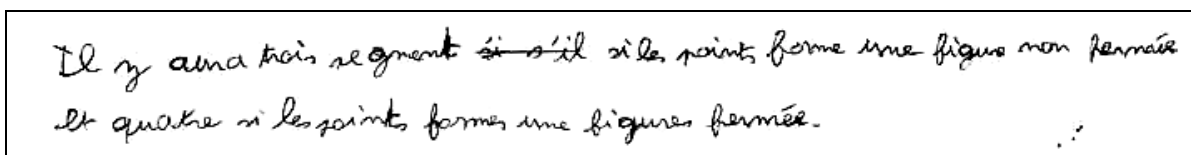
Exemple 48 : Elève 115, problème A<sub>sgm</sub> 20-4  $n=4$ .

L'élève de l'Exemple 48 aligne les points et constitue les segments entre ces points sans considérer la possibilité de segments entre points éloignés (entre le premier et le troisième, par exemple). L'organisation même de la figure semble faire obstacle à cela et l'élève n'inventorie que des appariements d'immédiate proximité.



Exemple 49 : Elève 039, problème Dis 4-20  $n=4$ .

C'est encore le cas dans l'Exemple 49. La structure même de la figure (une grille de quatre cases en deux lignes et deux colonnes) engage une énumération circulaire fermée : l'inventaire des possibles concernant les cases voisines verticalement ou horizontalement. Cet élève n'envisage pas la possibilité d'énumérations en diagonales alors même que la forme de la figure l'autorise au contraire de l'exemple précédent.



Exemple 50 : Elève 193, problème A<sub>sgm</sub> 20-4  $n=4$ .

### c. Autres réponses fausses

Un certain nombre de réponses fausses sont difficiles à comprendre parce que les justifications qui les accompagnent sont relativement pauvres et dénotent une interprétation fautive du contenu de l'énoncé. Ainsi, nous les considérons comme peu cohé-



rentes même si elle peuvent renvoyer à certaines des procédures décrites ci-dessus. Cette absence de cohérence semble fortement liée à des interprétations déformantes de l'énoncé du problème. Nous les regroupons dans une catégorie « autres ». Nous les présentons en annexes (cf. page 278). Cependant, il est possible d'en signaler certaines qui se répètent. Beaucoup de ces réponses s'apparentent certainement des réponses intuitives et spontanées que Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (ibid.) ont observées sur leur corpus.

• *Autant de possibilités que d'objets*

Ce type de réponse donne le même résultat qu'une énumération circulaire. Mais rien ne nous permet de penser qu'elle relève de la même interprétation de l'énoncé. En voici quelques exemples :

il y a 4 saluts qui son echangés entre tout'entre  
ces 4 personnes parce que un salut par personnes  
et comme il y en a 4.

Exemple 51 : Elève 094, problème Aslt 4-20  $n=4$ .

« Il y a 4 saluts qui sont échangés en tout entre ces 4 personnes parce qu'un salut par personne et comme il y en a 4... »

<p>2 jetons sur 2 cases</p> <p>4 jetons sur 4 cases</p> <p>Ma réponse : 8</p>	<p><b>Justifie soigneusement ta réponse</b></p> <p>4 jetons sur 4 cases.</p>
---	--

Exemple 52 : Elève 122, problème Dis 4-20  $n=4$ .

« 2 jetons sur 2 cases

4 jetons sur 4 cases

Ma réponse : 4 jetons sur 4 cases. »

Justine soigneusement la réponse.

On peut faire 20 répartitions différentes car  
 Il y a 20 élèves qui doivent passer  
 tous en gendarmerie  
 Si il y a 20 élèves, ils doivent  
 tous passer en gendarmerie donc  
 comme il y a 20 élèves cela donne  
 20 répartitions

**Exemple 53 : Elève 070, problème Par 20-4 n=20.**

« On peut faire 20 répartitions différentes car il y a 20 élèves qui doivent passer tous en gendarmerie.

S'il y a 20 élèves, ils doivent tous passer en gendarmerie donc comme il y a 20 élèves, cela donne 20 répartitions. »

• **Le produit des deux paramètres  $n$  et  $p$**

Certains élèves ont répondu en multipliant les deux données numériques de l'énoncé. Les justifications des exemples ci-dessous ne permettent pas de penser que ces derniers renvoient à une interprétation identique de l'énoncé. L'Exemple 54 pourrait être une énumération partitive d'appariements ordonnés : « On peut tracer 40 segments car il y a deux extrémités par conséquent, il faut multiplier par 2. ».

On peut tracer 40 segments car il y a deux extrémités par conséquent il faut multiplier par deux.

**Exemple 54 : Elève 117, problème A<sub>sgm</sub> 20-4 n=20.**

L'Exemple 55 peut relever du même type de réponse que précédemment (autant de possibilités que d'objets) dans une interprétation de l'énoncé où il faut placer deux jetons par case : « Le nombre de placements différents sur cette grille de 4 cases est de :  $4 \text{ cases} \times 2 \text{ jetons} = 8$ . » Ce type de confusion (deux jetons sur deux cases, c'est deux jetons par case) se retrouve assez souvent au problème « distribution »<sup>10</sup>.

<sup>10</sup> Cette difficulté apparaît plusieurs fois entre les élèves de l'expérience « Atelier de résolution de problème » (chapitre IV).

de nombre de placements différents sur cette  
 grille de 4 cases est de  $4 \times 2 = 8$   
 cases selon

Exemple 55 : Elève 308, problème Dis 4-20  $n=4$ .

• **Le nombre de partages possibles de la collection en deux groupes**

Ce type de réponse concerne uniquement les situations relatives au jeu des gendarmes et des voleurs (sélection et partition). Les élèves qui la proposent transforment le sens de l'énoncé. Par exemple, ils considèrent certainement qu'une partie est constituée de plusieurs équipes de gendarmes comme dans l'Exemple 56 : « Il peut y avoir 18 gendarmes et 2 enfants, 3 enfants et 17 gendarmes, 4 enfants et 16 gendarmes, 5 enfants et 15 gendarmes... ».

Il peut y avoir 18 gendarmes et 2 enfants, 3 enfants et 17 gendarmes.  
 4 enfants et 16 gendarmes.  
 5 " " 15 "  
 6 " " 14 "  
 7 " " 13 "  
 8 " " 12 "  
 9 " " 11 "  
 10 " " 10 "  
 11 " " 9 "  
 12 " " 8 "  
 13 " " 7 "  
 14 " " 6 "  
 15 " " 5 "  
 16 " " 4 "  
 17 " " 3 "  
 18 " " 2 "  
 19 " " 1 "

Exemple 56 : Elève 266, problème Par 4-20  $n=20$ .

Les élèves peuvent encore considérer qu'il est possible de constituer une équipe plus ou moins importante de gendarmes comme dans l'Exemple 57 où l'élève dénombre 3 possibilités en tout :

- 1 gendarme et 3 voleurs,

- 2 gendarmes et 2 voleurs,
- 3 gendarmes et 1 voleur.

G = Gendarme  
 V = Voleur  
 2 G et 2 V  
 3 G et 1 V  
 1 G et 3 V  
 il y a 3 possibilités en tout

Exemple 57 : Elève 063, problème Par 4-20  $n=4$ .

L'Exemple 58 montre ce souci de laisser quelques voleurs pour que le jeu soit possible : « On peut faire qu'une seule équipe de gendarmes (1 équipe de 3 ou 2 ou encore d'un gendarme) car il faut au moins 1 voleur. »

On ne peut faire qu'une seule équipe de gendarme  
 (1 équipe de 3 ou 2 ou encore d'un gendarme) car il faut  
 au moins 1 voleur.

Exemple 58 : Elève 317, problème Sél 4-20  $n=4$ .

Ce type de réponse semble lié au problème « sélection ». Nous abordons spécifiquement cette difficulté ci-dessous (cf. page 129).

### 3. Distribution des procédures observées et des performances selon le facteur modèle combinatoire implicite.

S'intéresser aux effets liés au facteur « modèles combinatoires implicites », demande d'étudier la distribution des différentes procédures observées dans le corpus selon chacune de ces modalités expérimentales. Le tableau suivant (page suivante) présente cette distribution en données brutes et en pourcentages.

Ces données présentent certaines différences dans la distribution des procédures selon les problèmes posés. Il est évident que seul un test statistique pourrait certifier de la significativité des différences observées. Cependant, ces dernières semblent à chaque fois suffisamment importantes pour correspondre à certaines tendances. Nous pouvons

ainsi pressentir les effets liés à la sémantique de la situation sur la détermination des différentes procédures. Il reste donc difficile d'affirmer que cela relève uniquement des caractéristiques des différents modèles combinatoires implicites. N'oublions pas que la nature des objets qui constituent les différentes collections participe aussi aux significations que les élèves peuvent porter sur les situations au cours de l'interprétation de l'énoncé du problème.

**Tableau II : Distribution des procédures pour chaque modèle combinatoire implicite sur l'ensemble des réponses.**

Modèles combinatoires implicites	A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	Dis	Par	Sél
<b>Procédures</b>					
Enumération systématique à élément constant	19 15,2 %	9 6,3 %	4 3,3 %	13 9,7 %	10 8,3 %
Enumération corrigée	9 7,2 %	1 0,7 %	1 0,8 %	2 1,5 %	2 1,7 %
Enumération partitive répétée	3 2,4 %	1 0,7 %	9 7,4 %	4 3,0 %	1 0,8 %
Enum. circulaire complétée	0 0,0 %	7 4,9 %	4 3,3 %	0 0,0 %	0 0,0 %
Enumérations indéterminées	7 5,6 %	29 20,4 %	10 8,2 %	2 1,5 %	2 1,7 %
Enumération d'arrangements	39 31,2 %	8 5,6 %	1 0,8 %	12 9,0 %	8 6,7 %
Enumérations défaillantes	10 8,0 %	22 15,5 %	13 10,7 %	17 12,7 %	1 0,8 %
Enumération circulaire	1 0,8 %	28 19,7 %	3 2,5 %	2 1,5 %	0 0,0 %
Enumération partitive	12 9,6 %	26 18,3 %	48 39,3 %	40 29,9 %	82 68,3 %
Autres	25 20,0 %	11 7,7 %	29 23,8 %	42 31,3 %	14 11,7 %
Total	125 100,0 %	143 100,0 %	122 100,0 %	134 100,0 %	120 100,0 %

Il nous a paru nécessaire d'étudier ces données de manière plus synthétique puisque beaucoup de procédures sont sous représentées dans cette distribution et ne

pourraient donc intervenir dans l'interprétation du tableau. Pour cela nous les regroupons selon les classes de réponses que nous avons définis ci-dessus :

- Les réponses « justes » qui dénombrent l'ensemble des combinaisons possibles de 2 objets parmi  $n$  : ce sont les cinq premières lignes du tableau précédent.
- Les réponses « intermédiaires supérieures » qui présentent de façon exhaustive des arrangements avec ou sans répétitions et des combinaisons avec répétitions (6<sup>ème</sup> ligne du tableau précédent).
- Les réponses « intermédiaires inférieures » présentant une organisation défailtante dans l'énumération des appariements qui est, par conséquent, non exhaustive (7<sup>ème</sup> ligne du tableau).
- Les réponses « fausses » qui, au contraire des trois classes précédentes, ne produisent aucune « activité combinatoire » apparente (l'activité des élèves ne semble renvoyer ni à des dénombrements de combinaisons, ni à celles d'arrangements ou de permutations). Il s'agit des trois dernières lignes du tableau.

Les tableaux suivants exposent donc, en effectifs et en pourcentages, la distribution des performances selon la classe de réponse et les différents problèmes posés. Le premier concerne l'ensemble du corpus, le second et le troisième concernent l'ordre de résolution des problèmes (4-20 et 20-4). Avec les suivants, nous détaillons les deux précédents selon l'effectif des collections ( $n=4$  et  $n=20$ ). Enfin, les deux derniers tableaux concernent uniquement l'effectif de la collection sans tenir compte de l'ordre de résolution. Rappelons le codage des modèles combinatoires implicites.  $A_{slt}$  : association « salutations »,  $A_{sgm}$  : association « segments », Dis : distribution, Par : partition et Sél : sélection.

**Tableau III : Distribution des réponses selon chaque modèle combinatoire implicite pour l'ensemble des réponses.**

Modèles combinatoires implicites	A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	Dis	Par	Sél	Total
Classes de réponses						
Réponses justes	35 28,00%	45 31,47%	26 21,31%	16 11,94%	13 10,00%	135 20,64%
Réponses intermédiaires supérieures	42 33,60%	9 6,29%	3 2,46%	17 12,69%	10 7,69%	81 12,39%
Réponses intermédiaires inférieures	10 8,00%	24 16,78%	13 10,66%	17 12,69%	1 0,77%	65 9,94%
Réponses fausses	38 30,40%	65 45,45%	80 65,57%	84 62,69%	106 81,54%	373 57,03%
Total	125 100,0%	143 100,0%	122 100,0%	134 100,0%	130 100,0%	654 100,00%

**Tableau IV : Distribution des réponses selon chaque modèle combinatoire implicite (épreuve 4-20).**

Modèles combinatoires implicites	A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	Dis	Par	Sél	Total
Classes de réponses						
Réponses justes	19 29,23%	25 37,31%	23 35,94%	6 8,70%	11 17,74%	84 25,69%
Réponses intermédiaires supérieures	24 36,92%	2 2,99%	0 0,00%	9 13,04%	6 9,68%	4 12,54%
Réponses intermédiaires inférieures	7 10,77%	14 20,90%	9 14,06%	12 17,39%	1 1,61%	43 13,15%
Réponses fausses	15 23,08%	26 38,81%	32 50,00%	42 60,87%	44 70,97%	159 48,62%
Total	65 100,0%	67 100,0%	64 100,0%	69 100,0%	62 100,0%	327 100,00%

**Tableau V : Distribution des réponses selon chaque modèle combinatoire implicite (épreuve 20-4).**

Modèles combinatoires implicites	A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	Dis	Par	Sél	Total
Classes de réponses						
Réponses justes	16 26,67%	20 26,32%	3 5,17%	10 15,38%	2 2,94%	51 15,60%
Réponses intermédiaires supérieures	18 30,00%	7 9,21%	3 5,17%	8 12,31%	4 5,88%	40 12,23%
Réponses intermédiaires inférieures	3 5,00%	10 13,16%	4 6,90%	5 7,69%	0 0,00%	22 6,73%
Réponses fausses	23 38,33%	39 51,32%	48 82,76%	42 64,62%	62 91,18%	214 65,44%
Total	60 100,0%	76 100,0%	58 100,0%	65 100,0%	68 100,0%	327 100,00%

**Tableau VI : Distribution des réponses à n=4 selon chaque modèles combinatoires implicites.**

Modèles combinatoires implicites	A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	Dis	Par	Sél	Total
Classes de réponses						
Réponses justes	24 38,10%	39 55,71%	22 36,07%	14 20,90%	9 14,06%	108 33,23%
Réponses intermédiaires supérieures	20 31,75%	1 1,43%	2 3,28%	7 10,45%	5 7,81%	35 10,77%
Réponses intermédiaires inférieures	5 7,94%	3 4,29%	2 3,28%	14 20,90%	0 0,00%	24 7,38%
Réponses fausses	14 22,22%	27 38,57%	35 57,38%	32 47,76%	50 78,13%	158 48,62%
Total	63 100,0%	70 100,0%	61 100,0%	67 100,0%	64 100,0%	325 100,00%



**Tableau VII : Distribution des réponses selon chaque modèle combinatoire implicite  
(épreuve 4-20,  $n=4$ ).**

Modèles combinatoires implicites	A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	Dis	Par	Sél	Total
Classes de réponses						
Réponses justes	14 42,42%	23 67,65%	19 59,38%	6 17,65%	7 22,58%	69 42,07%
Réponses intermédiaires supérieures	12 36,36%	0 0,00%	0 0,00%	4 11,76%	4 12,90%	20 12,20%
Réponses intermédiaires inférieures	4 12,12%	1 2,94%	0 0,00%	11 32,35%	0 0,00%	16 9,76%
Réponses fausses	3 9,09%	10 29,41%	13 40,63%	13 38,24%	20 64,52%	59 35,98%
Total	33 100,0%	34 100,0%	32 100,0%	34 100,0%	31 100,0%	164 100,00%

**Tableau VIII : Distribution des réponses selon chaque modèle combinatoire implicite  
(épreuve 20-4,  $n=4$ ).**

Modèles combinatoires implicites	A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	Dis	Par	Sél	Total
Classes de réponses						
Réponses justes	10 33,33%	16 44,44%	3 10,34%	8 24,24%	2 6,06%	39 24,22%
Réponses intermédiaires supérieures	8 26,67%	1 2,78%	2 6,90%	3 9,09%	1 3,03%	15 9,32%
Réponses intermédiaires inférieures	1 3,33%	2 5,56%	2 6,90%	3 9,09%	0 0,00%	8 4,97%
Réponses fausses	11 36,67%	17 47,22%	22 75,86%	19 57,58%	30 90,91%	99 61,49%
Total	30 100,0%	36 100,0%	29 100,0%	33 100,0%	33 100,0%	161 100,00%

**Tableau IX : Distribution des réponses à  $n=20$  selon chaque modèles combinatoires implicites.**

Modèles combinatoires implicites	A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	Dis	Par	Sél	Total
Classes de réponses						
Réponses justes	11 17,74%	6 8,22%	4 6,56%	2 2,99%	4 6,06%	27 8,21%
Réponses intermédiaires supérieures	22 35,48%	8 10,96%	1 1,64%	10 14,93%	5 7,58%	46 13,98%
Réponses intermédiaires inférieures	5 8,06%	21 28,77%	11 18,03%	3 4,48%	1 1,52%	41 12,46%
Réponses fausses	24 38,71%	38 52,05%	45 73,77%	52 77,61%	56 84,85%	215 65,35%
Total	62 100,0%	73 100,0%	61 100,0%	67 100,0%	66 100,0%	329 100,00%

**Tableau X : Distribution des réponses selon chaque modèle combinatoire implicite (épreuve 20-4,  $n=20$ ).**

Modèles combinatoires implicites	A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	Dis	Par	Sél	Total
Classes de réponses						
Réponses justes	6 20,00%	4 10,00%	0 0,00%	2 6,25%	0 0,00%	12 7,23%
Réponses intermédiaires supérieures	10 33,33%	6 15,00%	1 3,45%	5 15,63%	3 8,57%	25 15,06%
Réponses intermédiaires inférieures	2 6,67%	8 20,00%	2 6,90%	2 6,25%	0 0,00%	14 8,43%
Réponses fausses	12 40,00%	22 55,00%	26 89,66%	23 71,88%	32 91,43%	115 69,28%
Total	30 100,0%	40 100,0%	29 100,0%	32 100,0%	35 100,0%	166 100,00%

**Tableau XI : Distribution des réponses selon chaque modèle combinatoire implicite  
(épreuve 4-20,  $n=20$ ).**

Modèles combinatoires implicites	A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	Dis	Par	Sél	Total
<b>Classes de réponses</b>						
Réponses justes	5 15,63%	2 6,06%	4 12,50%	0 0,00%	4 12,90%	15 9,20%
Réponses intermédiaires supérieures	12 37,50%	2 6,06%	0 0,00%	5 14,29%	2 6,45%	21 12,88%
Réponses intermédiaires inférieures	3 9,38%	13 39,39%	9 28,13%	1 2,86%	1 3,23%	27 16,56%
Réponses fausses	12 37,50%	16 48,48%	19 59,38%	29 82,86%	24 77,42%	100 61,35%
Total	32 100,0%	33 100,0%	32 100,0%	35 100,0%	31 100,0%	163 100,00%

Nous détaillons à présent ces données selon (A) chaque classe de réponse par ordre décroissant d'importance, selon (B) l'effectif  $n$  de la collection et selon (C) chaque modalité du facteur modèle combinatoire implicite.

### **A. Description par classe de réponse**

D'une façon générale, 373 des 654 réponses recueillies, soit 57 %, sont des réponses fausses comme le montre le Tableau III. Les modèles combinatoires implicites qui présentent majoritairement des réponses que nous qualifions strictement de « fausses » sont, dans l'ordre décroissant, Sél (106 cas sur les 130 réponses à Sél, soit 82 % de réponses fausses), Dis (80 cas sur 122, soit 66 % de cette classe) et Par (63 cas sur 134, soit 63,9 %).

En deuxième position, se situent les réponses strictement justes. Elles représentent 135 cas sur 654, soit 20,6 % des réponses recueillies, tous problèmes confondus. Les réponses justes sont principalement associées à A<sub>sgm</sub> (45 cas sur les 143 de cette classe, soit 31,5 %) plutôt pour les problèmes où  $n=4$  (39 cas sur les 70 réponses à A<sub>sgm</sub>  $n=4$ , soit 55,71 %), surtout quand ils sont résolus en premier (23 cas sur les 34, soit 67,65 %). Vient ensuite A<sub>slt</sub> avec 35 cas de réponses justes sur les 125 réponses à cette classe (28 %), là encore plutôt quand  $n=4$  (24 cas sur 63, soit 38,10 %). Enfin il faut

noter que, dans les problèmes 4-20 quand  $n=4$ , Dis présente 19 réponses justes sur 32 ce qui fait 59,38 %.

Les réponses intermédiaires supérieures sont en troisième position avec 81 cas sur 638, soit 12,4 % de toutes les réponses. Elles sont essentiellement liées à  $A_{slt}$  (42 cas sur 125, soit 34 % des réponses liées à ce modèle combinatoire implicite), réparties pratiquement équitablement entre les problèmes  $n=4$  (20 cas sur 63, soit une fréquence de 0,32) et les problèmes où  $n=20$  (22 cas sur 62, soit une fréquence de 0,35).

Les réponses les moins observées sont les réponses intermédiaires inférieures : elles représentent 65 occurrences sur les 654 réponses recueillies, soit 9,9 % des cas. Ces réponses sont surtout liées à  $A_{sgm}$  pour les problèmes  $n=20$  (21 cas sur 73, soit une fréquence de 0,29) puis à Par 4-20,  $n=4$  (11, cas sur 34, soit une fréquence de 0,32).

Revenons sur ces données d'abord par ordre de résolution des problèmes, puis par situation.

## **B. Description par effectif de la collection et selon l'ordre de résolution**

Au niveau des effectifs  $n$  de la collection, les situations où  $n=4$  sont plutôt contrastées en étant soit liées à des réponses justes pour 33,2 % des cas, soit liées à des réponses fausses pour 48,6 % des cas (cf. Tableau VI). Les situations où  $n=20$  sont principalement associées à des réponses fausses (65,3 % des cas, cf. Tableau IX). Les énoncés  $n=20$  sont donc plus difficiles à résoudre que les problèmes  $n=4$  (ce qui n'est pas une surprise en soi).

Il convient cependant de nuancer ces données selon qu'il s'agit, de problèmes résolus en premier ou en second. Cette nuance ne concerne pas les énoncés  $n=20$  puisqu'ils présentent des scores proches en 4-20 (61,35 %) et en 20-4 (69,28 %) comme nous le montrent le Tableau X et le Tableau XI. Les énoncés  $n=4$  présentent plus de réponses justes quand ils sont résolus en premier (42,07 % pour 4-20) qu'en second (24,22 % pour 20-4) comme il est possible de le voir dans le Tableau VII et le Tableau VIII. En contre partie, il apparaît aussi que les réponses fausses pour les énoncés  $n=4$  sont plus importantes en 20-4 (61,49 %) qu'en 4-20 (35,98 %). Il semble donc qu'un

travail préalable sur l'énoncé  $n=20$  réduise les possibilités de réussir à résoudre le problème  $n=4$ .

Ces données expliquent le fait que les problèmes 4-20 connaissent à la fois des réponses justes (25,69 %) et des réponses fausses (48,62 %) alors que les réponses fausses dominent largement en 20-4 (65,44 %) comme le montrent le Tableau IV et le Tableau V. Cet aspect des réponses est étudié plus en détail dans la section qui concerne la variation des réponses entre les deux problèmes de l'épreuve « Devoir sur table » (cf. infra, p. 135).

### **C. Description par modalité du facteur « modèles combinatoires implicites »**

En ce qui concerne l'influence des différents modèles combinatoires implicites sur les réponses des élèves, l'analyse des procédures (cf. sous 0III.4, p. 99 et suivantes) est beaucoup plus riche d'enseignements que cette simple analyse des performances.

Cependant, nous pouvons constater dans le Tableau III que  $A_{slt}$  est plutôt associée de façon à peu près égale aux réponses justes (28 % des cas), intermédiaires supérieures (33,6 % des cas) et fausses (30,4 % des cas). Les réponses justes sont essentiellement des énumérations systématiques (15,2 %), les réponses intermédiaires sont des énumérations d'arrangements (31,2 %) et les réponses fausses sont de type « autres » (20 %) (cf. Tableau II).

$A_{sgm}$  est principalement liée à des réponses fausses (45,5 % des cas) mais aussi de façon non négligeable à des réponses justes (31,5 % des cas). Les réponses justes relèvent de procédures indéterminées, les intermédiaires sont des énumérations défailtantes et les fausses, se partagent entre énumérations circulaires et énumérations partitives et calculs  $n/2$ .

Les deux configurations « association » ( $A_{slt}$  et  $A_{sgm}$ ) présentent donc des réponses plutôt associées aux réponses justes et intermédiaires. Ces deux configurations se caractérisent, en effet, dans l'ensemble par une quantité de réponses fausses inférieure à la moitié de leurs effectifs de classe : soit 45,5 % pour  $A_{sgm}$  et 30 % pour  $Ard$ .

Les autres modèles combinatoires implicites génèrent majoritairement des réponses fausses : Sél (82 % des cas), Dis (66 % des cas) et Par (63 % des cas). Dis présente surtout des énumérations partitives (4 réponses sur 10), des réponses de type « autres » (1 réponse sur 3). Quand le traitement de Dis relève d'une activité combinatoire apparente, il s'agit surtout d'énumérations défaillantes (1 réponse sur 10). Nous retrouvons à peu près la même distribution pour Par (1/3 d'énumérations partitives, 1/3 d'énumérations « autres » et 1/10 d'énumérations défaillantes). Sél est essentiellement définie par des énumérations partitives (7 fois sur 10). Toutes ces différences demandent des explications et sont donc étudiées dans une section ultérieure (cf. sous III.4, p. 99).

#### **4. Quelques traitements statistiques des données recueillies**

Ce rapide coup d'œil permet de constater que les différentes distributions en jeu se distinguent bien entre elles sur certains points selon la nature des modèles combinatoires implicites et l'ordre de résolution des problèmes. La première question que l'on se pose à propos de ces variations est la suivante : à partir de quelles valeurs attestent-elles d'un effet certain de telle ou telle modalité des facteurs étudiés ? Il s'agit donc de vérifier la significativité des différences observées afin de fonder les résultats de cette recherche.

Pour cela, les données recueillies sont organisées selon un plan factoriel<sup>11</sup> qui croise les modalités du facteur « modèles combinatoires implicites » et celles de l'épreuve (4-20 et 20-4). Pour constituer cette analyse, il est donc nécessaire de traduire par des valeurs spécifiques les différentes classes de réponses des élèves que nous avons décrites en terme de performances.

---

<sup>11</sup> Rappelons qu'une variable contextuelle n'a pu être étudiée systématiquement. Il s'agit de la nature des objets qui constituent les collections et sur lesquels portent les dénombrements (points reliés par des segments, enfants jouant, personnes se serrant la main, cases de grilles à cocher). Les comparaisons entre les scores des différents groupes doivent être interprétés en tenant compte de ce point. Ce problème sera développé dans la partie concernant l'épreuve « Atelier de résolution de problème ».

## **A. Définition d'un barème de notation des réponses**

Nous présentons à cet effet le barème qui permet de noter chacune des réponses du corpus. Ce barème attribue des valeurs différentes pour chaque classe de réponse puisque nous les avons hiérarchisées selon cet ordre : réponses « justes », réponses « intermédiaires » supérieures et inférieures, et réponses « fausses ».

Ces dernières sont notées 0.

Comme nous distinguons et hiérarchisons les réponses dites « intermédiaires supérieures » des « intermédiaires inférieures », nous attribuons 2 points aux premières et 1 point aux secondes.

Pour les problèmes dont l'effectif de la collection est  $n=4$ , les réponses justes donnent 3 points. Il nous semble important de noter différemment les réponses justes aux problèmes  $n=20$  puisque la résolution peut difficilement se faire par un simple inventaire. En l'occurrence, il est possible de distinguer dans ce cas trois formes de réponses justes :

- les réponses présentant un long inventaire des possibles (190 groupes 2 à 2 possibles parmi les 20 objets de la collection),
- les réponses mixtes présentant à la fois un inventaire plus ou moins abouti et un calcul,
- les réponses constituées directement par un calcul.

Nous interprétons ces trois types de réponses comme trois niveaux hiérarchisés de réussites pour les raisons suivantes. Margolinas (1993, pp. 23-27) présente le passage de l'empirisme au rationalisme chez l'élève comme l'abandon de vérités factuelles et contingentes pour des vérités dont la nécessité se fonde sur des opérations mentales. Cet auteur évoque ainsi le passage d'un statut « assertorique » de la vérité (le vrai par le fait) à un statut « apodictique » (le vrai par la nécessité). Dans ce dernier cas, l'élève comprend sans besoin de constater ou de vérifier. A ce stade, il peut anticiper le résultat d'une action avec la garanti de sa validité.

Il est donc nécessaire de distinguer dans les réponses recueillies au cours de cette expérience, d'une part, celles pour lesquelles les élèves se fondent sur l'évidence du constat à partir de leur activité d'énumération (réponses sous forme de figures ou

d'inventaires sur listes) et, d'autre part, celles pour lesquelles les élèves s'appuient sur des opérations mentales à partir de relations clairement anticipées (réponses sous forme de calculs).

Dans le cadre de cette approche, notre interprétation des réponses mixtes est la suivante : les élèves commencent par un inventaire sur figure ou sur liste. Cette activité leur permet de découvrir, de mettre en évidence de façon empirique certaines propriétés qui caractérisent la situation. Elle permet encore de vérifier *de facto* la pertinence de l'interprétation qu'ils ont de cette dernière et de l'améliorer. Ils élaborent ainsi et évaluent une représentation du problème qui permet de répondre de façon plus appropriée à l'ampleur de la tâche, par des calculs. Les exemples suivants pourraient illustrer ce passage de l'empirisme au rationalisme. Voici quelques exemples :

Dans le premier, (Exemple 59), l'élève commence par chercher sur petit effectif ( $n = 2$ ) une règle qu'il peut appliquer à un effectif plus important ; il passe ainsi à  $n=3$  : « *Quand il y a 2 personnes, il y a 1 salut et s'il y en a 3 il y aura [...]* ». A ce stade de réflexion, il a besoin d'énumérer les combinaisons 2 à 2 parmi 3 objets en utilisant une procédure systématique (cf. sous III.2.A.a, p.59) : AB, AC, BC. Puis il passe à une collection d'effectif 12 dont il inventorie les possibles de la même façon. Mais il cesse cet inventaire au moment où il découvre que le premier objet peut être composé avec 19 objets : « *C'est-à-dire 11 pour A...* » Il cherche à généraliser cette découverte incomplète : « *...ainsi que pour les autres* », à savoir que chacun des  $n$  objets peut être composé  $n-1$  fois. Cette première généralisation est cependant prématuré puisqu'il n'a pas encore réalisé que chaque objet de rang  $i$  ( $1 < i < n$ ) peut être composé  $n-i$  fois.



Justifie soigneusement la réponse.

- Quand il y a 2 personnes il y a 1 salut, ~~mais~~ si il y en a 3 il y aura, appelons les personnes ABC, AB, AC, BC donc 3. Si il y en a 12: ABCDEFGHIJKL  
AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH, AI, AJ, AK, AL, BC, BD, BE...
- C'est à dire ~~11~~ pour A ainsi que pour les autres <sup>bon</sup> ~~10 pour B~~
- donc si il y a 20 personnes ça fait 19 pour la 1<sup>ère</sup>, 18 pour la 2<sup>e</sup> etc parce que A a déjà salué B ils ne se saluent pas 2 fois.
- donc 19 + 18 + 17 + 16 + ...
- donc 1800 saluent.

Exemple 59 : Elève 104, problème A<sub>slt</sub> 20-4 n=4.

Les écritures qu'il nous laisse ensuite laissent penser qu'il remet en cause son interprétation de l'énoncé puisqu'il écarte sa première généralisation (« ...ainsi que pour les autres ») en l'entourant (les sujets devaient entourer les « repentir » de leurs travaux au lieu de les barrer) pour constater que le deuxième objet ne devait avoir que 10 groupes possibles 2 à 2 : « 10 pour B ». Cependant il rejette ce constat et valide la première généralisation en écrivant « bon » au dessus (en haut, à droite de la phrase). Cette découverte faite, il l'applique immédiatement aux données du problème, à savoir les 20 personnes qui se saluent. On remarque, dans sa deuxième conclusion, certaines difficultés à se représenter la situation de façon stable :

« Donc si il y a 20 personnes ça fait pour la 1<sup>ère</sup>, 19 pour la 2<sup>ème</sup> etc. parce que A a déjà salué B ils ne se saluent pas 2 fois. »

Le début de l'énoncé est en contradiction avec la fin.

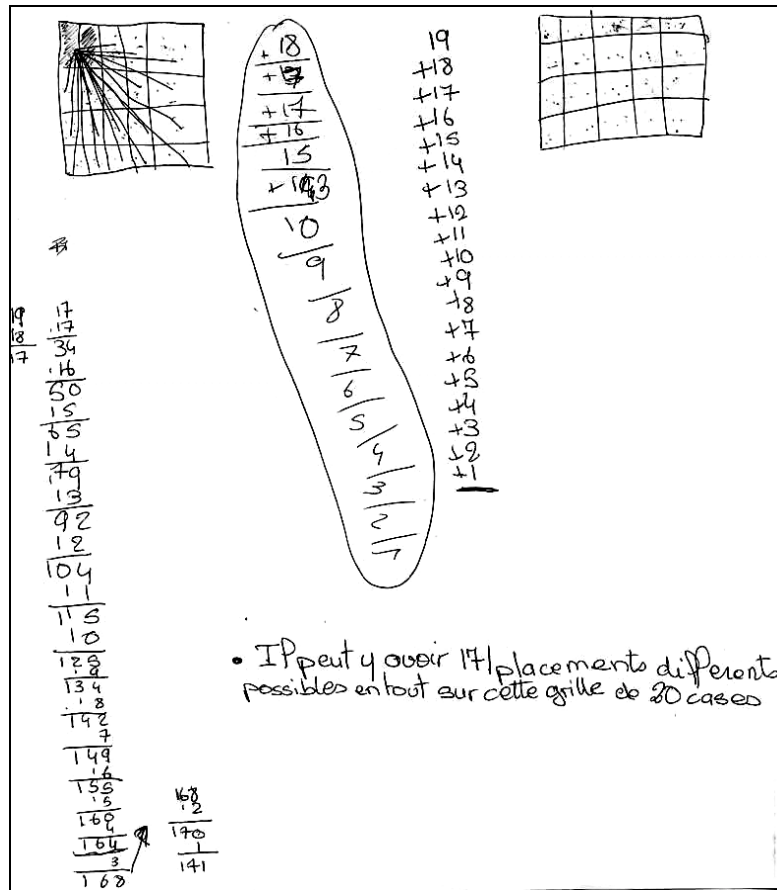
D'une façon générale, ce moyen d'explorer la situation lui permet d'y découvrir progressivement une propriété généralisable, essentielle pour résoudre le problème. A ce moment, il est possible de penser que l'élève a élaboré une représentation suffisamment aboutie du problème pour remplacer l'inventaire par un calcul.

Il abandonne une activité empirique de recherche - se traduisant par un inventaire - pour un raisonnement qui se dispense de vérifications *de facto*. L'élève qui écrit l'opération  $19 + 18 + 17 + 16$ , etc. n'a plus besoin de s'assurer que l'inventaire relatif au 4<sup>ème</sup> objet, par exemple, ne présente que 16 groupes possibles 2 à 2.

L'Exemple 60 montre un autre cas d'élaboration de la réponse présentant une évolution de « l'empirisme » au « rationalisme ». Le sujet explore les propriétés de la situation sur une figure qui représente la grille de vingt cases dont il est question dans l'énoncé. Puis il commence une énumération systématique des groupes possibles à partir de la première case (figure en haut et à gauche). Cette énumération est rendue visible grâce aux lignes qui partent d'une même case et s'orientent vers les différentes autres cases de la grille. L'énumération semble continuer et des points perceptibles dans les cases peuvent attester d'un comptage des possibles. Le passage du trait au point est une première économie dans l'activité d'énumération. Cela permet aussi de maintenir la visibilité de l'activité sur un support qui ne se surcharge pas de lignes.

Cet inventaire présenté ci-dessous est associé à un écrit (entouré d'une ligne) qui mémorise les différents groupes possibles énumérés case par case : «  $+18/ +17/ +17/ +16/ 15/ +13/ 10/ 9/ 8/ 7/ 6/ 5/ 4/ 3/ 2/ 1$  ». Le recours à des écrits ayant pour fonction de mémoriser les résultats partiels du comptage est important : l'élève peut y constater une caractéristique de l'inventaire (malgré les erreurs de comptage), à savoir que chaque terme correspond au terme précédent moins 1.

Il est possible qu'il ait vérifié sa découverte sur la figure en haut à droite pour quelques cas seulement (elle présente peu de points comme traces du comptage). Cet abandon de la vérification, ainsi que le rejet des résultats comptés pas à pas lors de la première énumération (elle est entourée d'une ligne qui, dans les consignes passées aux élèves par l'expérimentateur, correspond à une réponse rejetée) permettent de penser que l'élève qui écrit l'opération juste «  $19+18+17+ [...]$  » s'appuie bien sur une propriété abstraite à partir de son activité d'inventaire sur figure.



Exemple 60 : Elève 041, problème Dis 4-20  $n=20$ .

L'Exemple 61 présente un autre cas pour lequel l'élaboration de la réponse correspond une évolution qui va d'un mode empirique (énumération sur liste) à un mode opératoire (calculs). L'élève commence par inventorier les groupes possibles à partir d'un objet A. Cet inventaire juste n'est pas complet ce qui permet de penser que cet élève semble se libérer du factuel et du contingent pour s'appuyer sur la nécessité qu'apporte le recours à des opérations mentales. Il explicite une règle générale (« *A chaque fois que l'on échange l'enfant commun, le nombre d'équipe diminue de 1* ») qui atteste d'une compréhension suffisante de la situation pour se passer de toute vérification factuelle. La présence de l'opération  $19 \times 20$  rejetée semble attester d'une première généralisation de ce qui a été observé (chacun des 20 objets peut être composé 19 fois). L'opération finale  $19+18+17+ \dots +2+1$  et ce qu'il écrit « *Dans le cas où B serait l'enfant commun, il y aurait 18 équipes différentes (car AB c'est la même que BA.)* » permettent de penser que l'élève arrive à une interprétation pertinente de la situation.

Les enfant sont representés par des lettres:  
 A - B - C - D - E - F - G - H - I - J - K - L - M - N - O - P - Q -  
 R - S - T

Il peut y avoir comme équipe: AB - AC - AD - AE - ..... AR - AS - AT.

Dans ce cas là, il y avait 19 équipe

Dans chaque équipes, il y a un élève commun.  
 (toutes les)

Dans ce cas, l'enfant commun est A et il y a 19 équipe différentes

Dans le cas où B serait l'enfant commun, il y aurait 18 équipe différentes. (car AB c'est la même que BA.)

A chaque fois que l'on change l'enfant commun, le nombre d'équipe diminue de 1

Donc  $19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =$  nombre d'équipe différentes.

A mon avis,  $= 192$   
 il y avait 192 équipe différente de personnes.

$20 \times 19 = 380$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 19 \\ \hline 180 \\ 200 \\ \hline 380 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ + 18 \\ + 17 \\ + 16 \\ + 15 \\ + 14 \\ + 13 \\ + 12 \\ + 11 \\ + 10 \\ + 9 \\ + 8 \\ + 7 \\ + 6 \\ + 5 \\ + 4 \\ + 3 \\ + 2 \\ + 1 \\ \hline 192 \end{array}$$

Exemple 61 : Elève 073, problème Par 20-4  $n=20$ .

A la lumière de ces trois exemples, il est possible d'interpréter les réponses peu adaptées à la complexité de la tâche présentant un inventaire complet des 190 combinaisons à dénombrer comme l'impossibilité pour les élèves d'abandonner une certitude empirique *de facto* pour une certitude rationnelle généralisable *de jure*. L'Exemple 62 en présente un cas : l'élève met en œuvre une énumération systématique très bien organisée dans le plan de la feuille (les colonnes correspondent à l'inventaire des possibles, objet par objet, dans l'ordre alphabétique). Il est parfaitement concevable de penser que l'élève constate des régularités en produisant sa réponse. Une telle observation de sa part lui permettrait de réaliser que chaque objet de rang  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) peut constituer  $n-i$  combinaisons. Ce constat l'autoriserait alors à agir en conséquence, en toute certitude, en abandonnant un inventaire fastidieux pour mettre en œuvre la procédure additive de cette façon :  $19+18+17+ \dots +2+1$ . Mais cet élève ne le fait pas. Il semble donc raisonnable de distinguer sa réponse des trois précédentes.

On peut faire 174 équipes :

\*noms des enfants :

A*B	B*C	C*D	D*E	E*F	F*G	G*H
A C	B D E F	C E	D F	E G	F H	G I
A D	B B B B	C F	D H	E H	F I	G J
A E	B B B B	C G	D I	E I	F J	G K
A F	B B B B	C H	D J	E J	F K	G L
A G	B B B B	C I	D K	E K	F L	G M
A H	B B B B	C J	D L	E L	F M	G N
A I	B B B B	C K	D M	E M	F N	G O
A J	B B B B	C L	D N	E N	F O	G P
A K	B B B B	C M	D O	E O	F P	G Q
A L	B B B B	C N	D P	E P	F Q	G R
A M	B B B B	C O	D Q	E Q	F R	G S
A N	B B B B	C P	D R	E R	F S	G T
A O	B B B B	C Q	D S	E S	F T	
A P	B B B B	C R	D T	E T		
A Q	B B B B	C S				
A R	B B B B	C T				
A S	B B B B					
A T	B B B B					

H*I	I*J	J*K	K*L	L*M	M*N	N*O	O*P	P*Q	Q*R	R*S	S*T
H J	I K	J L	K M	L N	M O	N P	O Q	P R	Q S	R T	
H K	I L	J M	K N	L O	M P	N Q	O R	P S	Q T		
H L	I M	J N	K O	L P	M Q	N R	O S	P T			
H M	I N	J O	K P	L Q	M R	N S	O T				
H N	I O	J P	K Q	L R	M S	N T					
H O	I P	J Q	K R	L S	M T						
H P	I Q	J R	K S	L T							
H Q	I R	J S	K T								
H R	I S	J T									
H S	I T										
H T											

Exemple 62 : Elève 286, problème Sél 4-20  $n=20$ .

Quant aux réponses ne présentant que des calculs, nous pouvons penser que les élèves qui les ont produites sont ceux qui sont certainement les plus dégagés de tout empirisme. Ils fondent leurs réponses sur la nécessité de relations clairement anticipées. L'Exemple 63 (relevant d'un dénombrement d'arrangements) présentent des explications qui dénotent une compréhension juste des caractéristiques de la situation :

« Chaque personne salue 19 autres personnes ; elle serre la main à 19 personnes. Il y a 20 personnes donc il y aura :

$$20 \times 19 = 380 \text{ saluts.}$$

Si on considère 1 salut échangé entre deux personnes,  $380/2 = 190$  saluts seront échangés. »

chaque personne salue les 19 autres personnes, elle  
sert la main à 19 personnes - Il y a 20 personnes  
donc il y aura :  
 $20 \times 19 = 380 \text{ saluts}$   
Si on considère 1 salut échangé entre deux personnes,  
 $\frac{380}{2} = 190 \text{ saluts}$  seront échangés

Exemple 63 : Elève 220, problème Sél 4-20  $n=20$ .

Pour ces raisons, les réponses justes à  $n=20$  constituées d'un inventaire sont notées 3 points, les réponses mixtes sont notées 4 points et les réponses produisant uniquement des calculs sont notées 5 points. Quand l'ordre de résolution est 4-20, on ne peut attribuer ces 5 points que si les élèves ont effectivement bien répondu par un calcul au premier énoncé et non par un inventaire. Ainsi, les deux réponses de l'élève 096 (Exemple 64 et Exemple 65) pour laquelle  $n=4$  est déjà sous forme de calcul. On remarque l'opération  $20 \times 19$  en haut à droite de la réponse. Même si cet élève n'est pas sûr de son résultat (il entoure « 190 saluts »), les réponses aux deux problèmes sont identiques et semblent relever uniquement de calculs.

Entre ces 4 personnes, ils y aura 6 saluts échangés  
vu qu'ils y a 4 personnes, que 1 personne va ~~se~~  
saluer 3 fois  $\times 3 \times 4 =$   $12 \div 2 = 6$  saluts.

Exemple 64 : Elève 096, problème A<sub>slt</sub> 4-20  $n=4$ .

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 19 \\ \hline 180 \\ 200 \\ \hline 380 \end{array}$$


Quand 2 personnes d'un groupe de randonneurs se retrouvent, elles se saluent en se serrant la main droite.  
Ce dimanche matin, 20 personnes du groupe se retrouvent.  
Combien de saluts sont échangés en tout entre ces 20 personnes ?  
**Justifie soigneusement ta réponse.**

Entre 20 personnes, il y aura 190 saluts.

Exemple 65 : Elève 096, problème A<sub>slt</sub> 4-20  $n=20$ .

Dans le cas contraire, une réponse sous forme de calculs à  $n=20$  en deuxième problème sera considérée comme mixte et notée 4 points. Les réponses suivantes (Exemple 66 et Exemple 67) montrent que l'élève a d'abord résolu le problème  $n=4$  par un inventaire sur une figure. Puis, il décrit certaines caractéristiques essentielles de la situation, à savoir que chaque objet peut être pris en compte trois fois et que le tout doit être divisée par 2.

HP aura 6 échange demain car



de 1 va perier 3 fois demain  
 de 2 va perier 3 fois de main  
 de 3 va perier 3 fois la main  
 de 4 va perier 3 fois de main  
 en tout 12 on divise par 2 = 6

Exemple 66 : Elève 009, problème A<sub>slt</sub> 4-20  $n=4$ .

La réponse à  $n=20$  qui a suivi est une application directe, sous forme de calculs, de la réponse précédente. Pour ces raisons, nous considérons cette réponse à  $n=20$  comme une réponse mixte.

de 1 va perier 19 fois	10 + 10 = 20	
2	19	141 + 141 = 342
3	19	
4	19	$\begin{array}{r} 342 \overline{) 2} \\ \underline{2} \phantom{00} \\ 02 \phantom{00} \\ \underline{0} \phantom{00} \\ 2 \phantom{00} \\ \underline{0} \phantom{00} \end{array}$
5	19	$\begin{array}{r} 141 \\ + 141 \\ \hline 342 \end{array}$
6	19	
7	19	
8	19	
10	19	
	<u>191</u>	

HP va avoir 141 échange de main

Exemple 67 : Elève 009, problème A<sub>slt</sub> 4-20  $n=20$ .

## B. Présentation des résultats

Le tableau suivant présente le barème de notation tel que nous venons de le définir. Cette grille de notation reste encore relativement arbitraire, nous en avons cons-

cience. Ce problème limite bien sûr les conclusions que nous pouvons tirer de cette analyse et il serait bien de pouvoir l'affiner en jouant sur les coefficients attribués aux différentes classes de réponse. Mais notre but à présent consiste à déterminer quelques tendances significatives et nous pensons que les données de l'analyse statistique permettent tout de même d'y répondre de manière satisfaisante.

**Tableau XII : Barème de notation.**

		<i>n</i> =20	<i>n</i> =4
Réponses justes	Calcul	5 points	3 points
	Mixte	4 points	
	inventaire	3 points	
Réponses intermédiaires	supérieures	2 points	2 points
	inférieures	1 point	1 point
Autres réponses fausses		0 point	0 point

Les trois tableaux suivants présentent les scores moyens ainsi obtenus selon un plan qui croise les modalités des deux facteurs. Ils concernent d'abord l'épreuve générale, puis les problèmes *n*=4, puis *n*=20. Ces données sont présentées en annexes (cf. page 272), sous forme de graphiques accompagnées du test statistique relatif à la signification des variations observées entre les modalités des différents facteurs.

**Tableau XIII : Scores moyens généraux (sur 8).**

Modèles combinatoires implicites	$A_{slt}$	$A_{sgm}$	Dis	Par	Sél	$m_i$
Ordre de résolution						
4-20	3,53	2,91	2,62	1,35	1,65	2,40
20-4	3,20	2,41	0,66	1,66	0,42	1,67
$m_j$	3,37	2,65	1,69	1,50	1,02	2,04

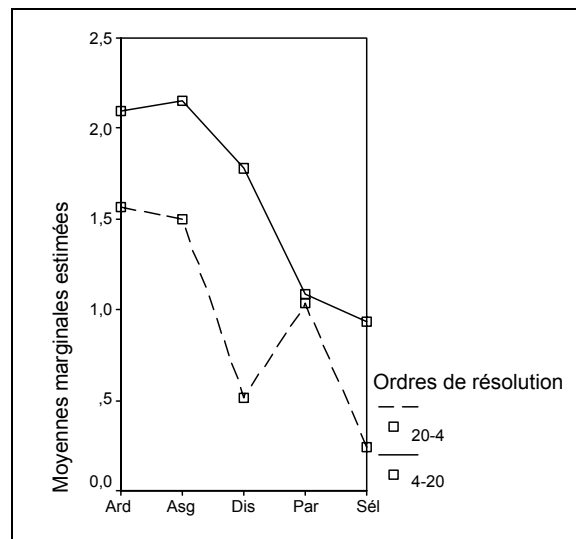
Les scores moyens généraux sont sur 8 puisque cette note est la meilleure que peut avoir un élève ayant réussi aux deux problèmes de l'épreuve (la réussite à *n*=4 at-



tribue 3 points et la réussite à  $n=20$  fait gagner 5 points – cf. Tableau XII). Les scores moyens à  $n=4$  sont donc sur 3 et ceux pour  $n=20$  sont sur 5.

**Tableau XIV : Scores moyens pour  $n=4$  (sur 3).**

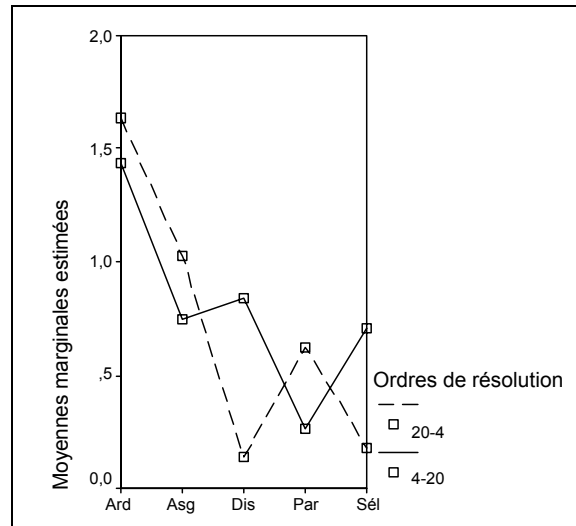
Modèles combinatoires implicites	$A_{slt}$	$A_{sgm}$	Dis	Par	Sél	$m_i$
Ordre de résolution						
4-20	2,09	2,16	1,70	1,09	0,94	1,61
20-4	1,57	1,50	0,52	1,03	0,24	0,97
$m_j$	1,84	1,82	1,18	1,06	0,58	1,29



**Figure 2 : Scores moyens pour chaque configurations combinatoires et selon l'ordre de résolution des problèmes ( $n=4$ ).**

**Tableau XV : Scores moyens pour  $n=20$  (sur 5).**

Modèles combinatoires implicites	$A_{slt}$	$A_{sgm}$	Dis	Par	Sél	$m_i$
Ordre de résolution						
4-20	1,44	0,75	0,04	0,26	0,71	0,80
20-4	1,63	1,03	1,14	0,63	0,18	0,72
$m_j$	1,53	0,89	0,51	0,44	0,44	0,76



**Figure 3 : Scores moyens pour chaque configurations combinatoires et selon l'ordre de résolution des problèmes ( $n=20$ ).**

Ces tableaux permettent tout d'abord de constater que la hiérarchie des problèmes selon le score obtenu est la même pour  $n=4$  comme pour  $n=20$ , soit respectivement dans l'ordre décroissant de réussite :  $A_{sgm}$ ,  $A_{slt}$ , Dis, Par et Sél. Cela renforce l'hypothèse d'un effet lié aux caractéristiques des situations indépendamment d'un effet lié aux valeurs en jeu.

Etudions à présent les différences de performances selon les deux modalités : « ordre de résolution des problèmes » et « modèles combinatoires implicites ». D'une façon générale, ces données ne montrent pas de différences liées à l'ordre de résolution des problèmes. Par contre, elles révèlent des différences significatives entre certains modèles combinatoires implicites.

### **a. Les différences des performances selon la modalité « ordre de résolution »**

Les résultats de l'analyse statistique (cf. annexes, p. 272) montrent que les scores moyens selon l'ordre de résolution ne sont pas significativement différents uniquement pour les problèmes  $n=20$ . Nous considérons donc que l'épreuve a été, d'une façon générale et, en particulier quand  $n=4$ , moins réussie en 20-4 qu'en 4-20 puisque les moyennes obtenues à cette dernière modalité est meilleur.

Cela permet de confirmer ce que nous avons vu précédemment : le fait de commencer par le problème  $n=20$  (20-4) ne favorise pas la réussite au problème  $n=4$ , comme si la complexité de la première situation perturbait de façon durable l'élaboration d'une interprétation pertinente de l'énoncé. Les élèves deviennent alors moins performants pour traiter une situation plus simple. Cependant, les problèmes Par  $n=4$  présentent une exception puisque la moyenne en 20-4 est très proche de celle obtenue en 4-20 (respectivement, 1,03 contre 1,09). Pour cette modalité de l'épreuve, la résolution des problèmes semble peu sensible au facteur « ordre de résolution ».

De la même façon, ces résultats peuvent faire penser que le fait de commencer par  $n=4$  (4-20) ne permet pas de mieux réussir le problème  $n=20$ . Un problème plus facile à résoudre ( $n=4$ ) en premier ne semble pas augmenter les chances de résolution quand  $n=20$ . Cela se conçoit facilement en cas d'échec au premier problème. Mais il est nécessaire de voir ce qui se passe quand le premier problème est réussi mais pas le second. Une analyse de notre corpus en terme d'évolution des réponses s'impose donc. Elle fait l'objet d'une prochaine partie (cf. sous III.6., p. 135).

### **b. Les différences de score entre les différents modèle combinatoire implicite**

Les tableaux suivants présentent la significativité<sup>12</sup> des différences relatives aux scores moyens entre chacune des modalités du facteur modèle combinatoire implicite. Le premier tableau présente ces données pour l'ensemble des réponses, le second et le troisième concernent respectivement les problèmes  $n=4$  et le, les problèmes  $n=20$ .

---

<sup>12</sup> Nous considérons comme significatives des valeurs comprises entre .05 (inclus) et .01 (exclu) et comme très significatives toute valeur inférieure à cet intervalle. Au dessus de .05, les valeurs ne sont plus interprétées comme significatives.

**Tableau XVI : Comparaison deux à deux des modalités du facteur modèle combinatoire implicite (ensemble des réponses). Test T2 de Tamhane.**

	A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	Dis	Par	Sél
A <sub>slt</sub>	-	nS	TS	TS	TS
A <sub>sgm</sub>	nS	-	nS	S	TS
Dis	TS	nS	-	nS	nS
Par	TS	S	nS	-	nS
Sél	TS	TS	nS	nS	-

TS : très significatif ( $P \leq .01$ ) ; S : significatif ( $.05 \leq P < .01$ ) ; nS : non significatif ( $P > .05$ )

**Tableau XVII : Comparaison deux à deux des modalités du facteur modèle combinatoire implicite ( $n=4$ ). Test T2 de Tamhane.**

	A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	Dis	Par	Sél
A <sub>slt</sub>	-	nS	nS	TS	TS
A <sub>sgm</sub>	nS	-	nS	S	TS
Dis	nS	nS	-	nS	nS
Par	TS	S	nS	-	nS
Sél	TS	TS	nS	nS	-

TS : très significatif ( $P \leq .01$ ) ; S : significatif ( $.05 \leq P < .01$ ) ; nS : non significatif ( $P > .05$ )

**Tableau XVIII : Comparaison deux à deux des modalités du facteur modèle combinatoire implicite ( $n=20$ ). Test T2 de Tamhane.**

	A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	Dis	Par	Sél
A <sub>slt</sub>	-	nS	TS	TS	TS
A <sub>sgm</sub>	nS	-	nS	nS	nS
Dis	TS	nS	-	nS	nS
Par	TS	nS	nS	-	nS
Sél	TS	nS	nS	nS	-

TS : très significatif ( $P \leq .01$ ) ; S : significatif ( $.05 \leq P < .01$ ) ; nS : non significatif ( $P > .05$ )

Une des premières remarques qui se dégage à la suite de ces résultats concerne le modèle combinatoire « association » qui se décline, dans les problèmes posés, selon deux modalités : A<sub>slt</sub> et A<sub>sgm</sub>. Ces dernières présentent non seulement les résultats les

plus forts mais les différences de score qu'elles présentent entre-elles ne sont jamais significatives. Il semble donc que ces résultats attestent bien de l'existence d'un modèle combinatoire implicite qui se distingue dans nos problèmes de la « distribution », de la « partition » ou de la « sélection ». Ces résultats montrent que les problèmes de notre expérience présentent des difficultés variables de résolution selon le modèle combinatoire implicite auquel ils correspondent.

Il est possible de noter que pour  $n=4$ , les scores moyens marginaux à  $A_{slt}$  et  $A_{sgm}$  se confondent pratiquement (respectivement 1,84 et 1,82, cf. Tableau XIV), alors que la différence s'accroît pour  $n=20$  (respectivement 1,53 et 0,89, cf.

Tableau XV) ce qui fait qu' $A_{sgm}$  n'est plus significativement différent des autres modalités. Enfin, les problèmes Par et Sél - présentant toujours les moins bons scores - portent tous les deux sur la situation « des gendarmes et des voleurs ». Il est bien possible que, dans ce cas, la sémantique des objets ait joué de façon plus importante sur les scores obtenus que la sémantique des relations liée aux modèles combinatoires implicites « partition » et « sélection ». Une étude de la distribution des procédures par modèle combinatoire implicite s'impose donc pour compléter cette analyse.

## **5. Distribution de la variable « procédures » selon les modalités du facteur « modèle combinatoire implicite »**

Dans cette partie de l'exposé, la distribution des procédures définies ci-dessus (cf. sous III.2, p. 58 et suivantes.) est présentée pour chacun des modèles combinatoires implicites (Tableau XX à Tableau XXIII). Dans chaque tableau, nous détaillons cette distribution selon l'effectif de la collection et l'ordre de résolution du problème. Cette section reprend en détail l'analyse faite précédemment et cherche à donner quelques interprétations sur les différences observées à partir des traces écrites produites par les élèves.

Nous rappelons que le codage 4-20 correspond au problème  $n=4$  travaillé en premier ; 4-20 correspond au problème  $n=20$  travaillé en second ; 20-4 correspond au problème  $n=4$  travaillé en second et 20-4 correspond au problème  $n=20$  travaillé en premier.

Nous avons désigné de la manière suivante chaque modalité de la variable dépendante « procédures » :

- ES signifie énumération systématique,
- ECC signifie énumération corrigée (ECC pour la distinguer de EC, ci-dessous),
- EPR signifie énumération partitive répétée,
- ECS signifie énumération circulaire et systématique,
- EI signifie énumération indéterminée,
- ED signifie énumération défailante (correspondant aux énumérations intermédiaires inférieures),
- EC signifie énumération circulaire,
- EP signifie énumération partitive.

Dans ces tableaux, nous distinguons d'une part les problèmes réussis (la réponse attendue a été trouvée, ce sont les réponses justes proprement dites) et, d'autre part, les problèmes dont la résolution est erronée (ils correspondent aux énumérations intermédiaires supérieures quand ils s'agit des procédures ES, ECC, EPC et ECS, aux énumérations intermédiaires inférieures avec la procédure ED et aux réponses strictement fausses avec les procédures EP, EC et autres).

Dans les différents tableaux ci-dessous, certaines valeurs présentent une écriture fractionnaire, comme «  $1/3$  » par exemple. Le nombre de gauche correspond au nombre de mises en œuvre des propriétés de la proportionnalité (cf. sous III.2.C.f, p. 80) pour la procédure considérée (dans l'exemple, nous avons observé 1 cas sur les 3).

Enfin, les commentaires des réponses que nous proposons en terme d'interprétation du contexte sémantique renvoient au modèle théorique de l'approche cognitive des processus de résolution de problème tels que nous les avons définis dans l'introduction.

## A. Distribution de la variable procédures pour la modalité « association – salutations »

Les problèmes  $A_{slt}$  se caractérisent par une importante quantité de réponses faisant l'objet d'une activité combinatoire, puisque c'est le cas pour 87 réponses sur les 125 (soit 69,6 % de réponses justes et intermédiaires). Elles correspondent essentiellement à l'énumération corrigée ECC (48 cas, soit 38,4 %). Cette procédure domine aussi bien pour les problèmes  $n=4$  que  $n=20$  (respectivement 23 cas sur 63, soit 36,51 % et 25 cas sur 62, soit 40,32 %), essentiellement pour des réponses que nous avons qualifiées « d'intermédiaires supérieures » (Cf. sous III.2.B, p. 71) soit 39 cas sur les 48 réponses ECC, soit 81,25 %.

**Tableau XIX : Répartition des procédures selon les différents problèmes  $A_{slt}$ .**

procédures problèmes		Réponses justes et intermédiaires						Réponses fausses			total
		ES	ECC	EPR	ECS	EI	ED	EC	EP	autres	
<u>4-20</u>	Réussis	6	3	1	0	4	-	-	-	-	14
	Erronés	1	11	0	0	0	4	1	1	1	19
	total	7	14	1	0	4	4	1	1	1	33
<u>20-4</u>	Réussis	4	2	2	0	2	-	-	-	-	10
	Erronés	0	7	0	0	1	1	0	3	8	20
	total	4	9	2	0	3	1	0	3	8	30
<u>20-4</u>	Réussis	4	2	0	0	0	-	-	-	-	6
	Erronés	0	10	0	0	0	1/2	0	5	7	24
	total	4	12	0	0	0	2	0	5	7	30
<u>4-20</u>	Réussis	4	2	0	0	0	-	-	-	-	6
	Erronés	0	11	0	0	0	3	0	1/3	9	26
	total	4	13	0	0	0	3	0	3	9	32
$n=4$		11	23	3	0	7	5	1	4	9	63
$n=20$		8	25	0	0	0	5	0	8	16	62
total		19	48	3	0	7	10	1	12	25	125

La présence importante de ce type de réponse n'est pas surprenante à la lumière des justifications des élèves. Ces derniers semblent avoir été induits en erreur par une ambiguïté concernant ce qu'il y avait à dénombrer. La question est : « *Combien de saluts sont échangés en tout entre ces 4 (ou 20) personnes ?* ». Or il n'est pas tout à fait incorrect de considérer comme « salut » l'action de chaque randonneur et non ce qui correspond à une poignée de main impliquant deux personnes. L'Exemple 68 est le plus caractéristique pour illustrer cette ambiguïté, surtout dans la première partie où l'élève écrit : « *Si 2 personnes se saluent, il y a 2 saluts.* » Dans une première réponse (qu'il rejette), il calcule donc 20 fois 2 saluts ; dans une réponse finale où il intègre l'idée que « [...] tout le monde se salue. », il calcule  $20 \times 19$  saluts car « *Si une personne salue chaque personne, il en saluera 19.* » Pour Ard, il s'agirait plutôt d'une interprétation erronée de ce qu'il faut dénombrer (les saluts) selon l'idée suivante : à chaque salut correspond un randonneur. Cette signification se retrouve dans notre seconde expérience (cf. sous IV) qui concerne des résolutions en interaction et pour lesquelles les élèves décrivent la situation telle qu'ils se la représentent pour justifier aux autres leurs propositions de réponses.

**Justifie soigneusement ta réponse.**

Si 2 personnes se saluent, il y a 2 saluent  
 alors si 20 personnes se saluent, il y a 40 saluent car  
 si 2 personnes se saluent, ~~alors~~ il y a 2 saluent  
 alors si 20 personnes se saluent, on établit le calcul

Suivant = 
$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 2 \\ \hline 40 \end{array}$$

alors si 20 personnes se saluent, il y aura 40 saluent.

---

0000000000  
 0000000000

Si sur 20 personnes tout le monde se saluent  
 Il y aura 20  $\times 19$  Il y aura 380 saluent car  

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 19 \\ \hline 180 \\ 20 \\ \hline 380 \end{array}$$
 Si une personne salue chaque personnes,  
 il en saluera 19.

Exemple 68 : Elève 303, problème A<sub>St</sub> 20-4  $n=20$ .



Cette erreur est plus rare pour les autres problèmes certainement parce qu'il n'y a pas de risque de se tromper sur ce qui fait l'objet du dénombrement : à 2 points, ne correspond qu'un seul segment possible ( $A_{sgm}$ ), avec 2 élèves, on ne fait qu'une équipe de gendarmes (Par et Sél), quand on choisit deux cases d'une grille, cela ne correspond qu'à un seul placement de 2 jetons (Dis). Quand elle existe, cette erreur peut s'interpréter comme un défaut d'attention vis-à-vis de la nature du référent : les segments ne sont pas orientés ( $A_{sgm}$ ), les équipes (Par et Sél) et les placements (Dis) ne sont pas ordonnés. Il est donc difficile de comparer les réponses du problème  $A_{slt}$  aux autres puisque les élèves ne semblent pas y avoir dénombré les mêmes choses.

Ce qui caractérise encore la répartition des procédures pour  $A_{slt}$  est le nombre important de réponses incohérentes (« autres ») : 1 élève sur 5 ayant travaillé sur ce problème est concerné (25 sur 125). Mais cela touche essentiellement les cas où  $n=20$  (16 sur les 25, soit 64 %, répartis en 7 cas sur 30 pour 20-4, soit 23,33 %, et 9 cas sur 32 pour 4-20, soit 28,12 %) et de façon à peu près similaire pour 20-4 (8 cas sur 30, soit 26,67 %). Dans ce dernier cas, nous pouvons constater qu'il s'agit quasiment des mêmes élèves qu'en 20-4 (les élèves numérotés 101, 166, 105, 168, 103 et 223), comme si le fait d'avoir travaillé avec difficultés sur le problème  $n=20$  avait réduit la possibilité de réussir la résolution du problème  $n=4$ .

Enfin, l'énumération systématique ES est assez présente dans les réponses à  $A_{slt}$  (19 cas sur les 125, soit 15,2 %) aussi bien pour  $n=4$  (11 cas sur 19) que pour  $n=20$  (8 cas sur 19).

## **B. Distribution de la variable procédures pour la modalité « as-sociation – segments »**

Comme pour  $A_{slt}$ , les réponses aux problèmes  $A_{sgm}$  se caractérisent par la mise en œuvre importante d'activités combinatoires puisque 77 réponses sur les 142 - ce qui fait plus de la moitié (54,22 %) - en relèvent (réponses justes et intermédiaires).

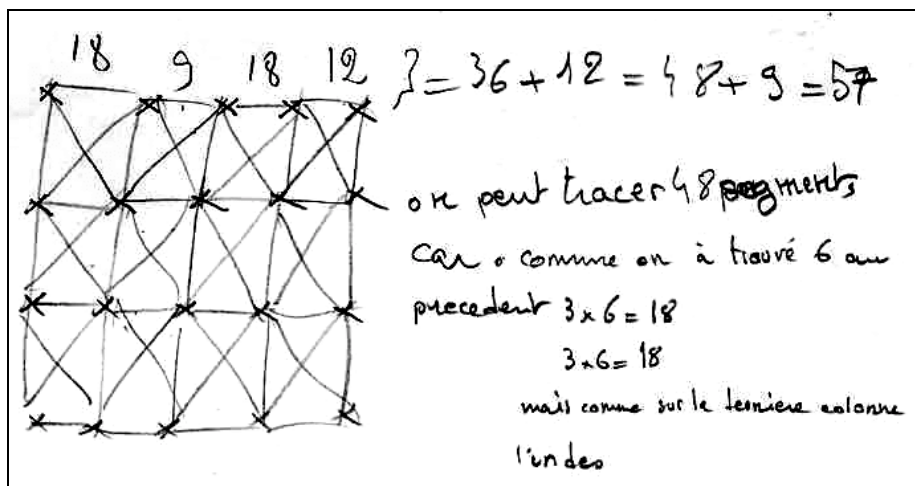
Ce sont uniquement les énumérations indéterminées EI quand  $n=4$  qui constituent cet effectif en ne donnant que des réponses justes (29 cas sur 142, soit 20,42 %). Un certain nombre de justifications qui accompagnent les réponses « énumérations in-

déterminées » montrent que certains élèves ont utilisé la notion de quadrilatère pour organiser et procéder à l'inventaire des possibles (élèves 025, 108, 171, 304, 305, 110 et 117). Nous avons évoqué ce point ci-dessus (cf. sous III.1.B, p. 53).

**Tableau XX : Répartition des procédures selon les différents problèmes A<sub>sgm</sub>.**

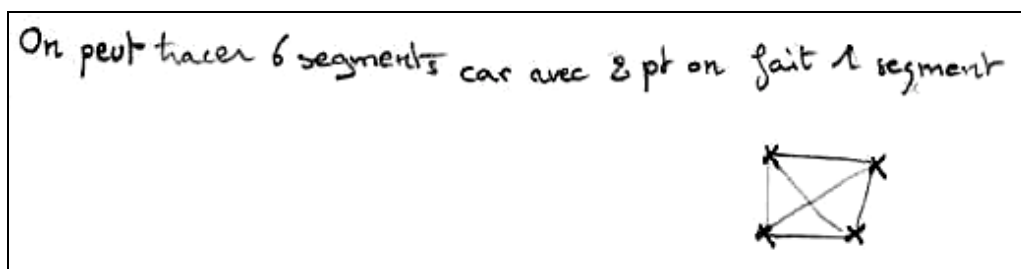
procédures problèmes		Réponses justes et intermédiaires						Réponses fausses			total
		ES	ECC	EPR	ECS	EI	ED	EC	EP	autres	
4-20	Réussis	1	1	1	4	16	-	-	-	-	23
	Erronés	0	0	0	0	1	0	6	4	0	11
	total	1	1	1	4	17	0	6	4	0	34
20-4	Réussis	3	0	0	1	12	-	-	-	-	16
	Erronés	0	1	0	0	0	1	8	7	2	24
	total	3	1	0	1	12	1	8	7	2	40
20-4	Réussis	3	0	0	1	0	-	-	-	-	4
	Erronés	1	5	0	0	0	8	8	11	3	29
	total	4	5	0	1	0	8	8	11	3	33
4-20	Réussis	1	0	0	1	0	-	-	-	-	2
	Erronés	0	2	0	0	0	2/13	6	4	6	31
	total	1	2	0	1	0	13	6	4	6	33
n=4		4	2	1	5	29	1	14	11	2	69
n=20		5	7	0	2	0	21	14	15	9	73
total		9	9	1	7	29	22	28	26	11	142

Quand  $n=20$ , les réponses se caractérisent surtout par des énumérations défail-  
lantes (21 cas sur 22) plutôt en 4-20 (13 cas sur 21 contre 8 pour 20-4). Cela peut  
s'expliquer par le fait que les élèves cherchent à résoudre le problème en s'inspirant de  
la réponse à  $n=4$  qui est, la plus part du temps, une énumération sur figure. Or, quand  
 $n=20$ , cette énumération est impossible à pratiquer et les élèves présentent alors des  
figures où les segments sont tracés de façon assez locale. Voici des exemples :



Exemple 69 : Elève 112, problème A<sub>sgm</sub> 4-20  $n=20$ .

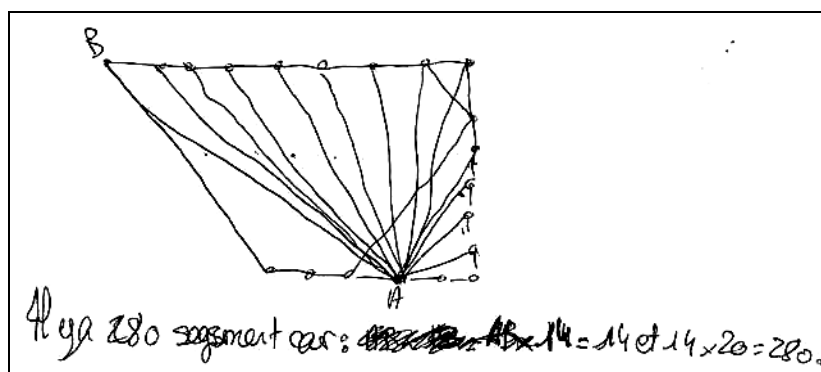
Cet élève applique sur 20 points la solution qu'il a trouvée sur 4 points :



Exemple 70 : Elève 112, problème A<sub>sgm</sub> 4-20  $n=4$ .

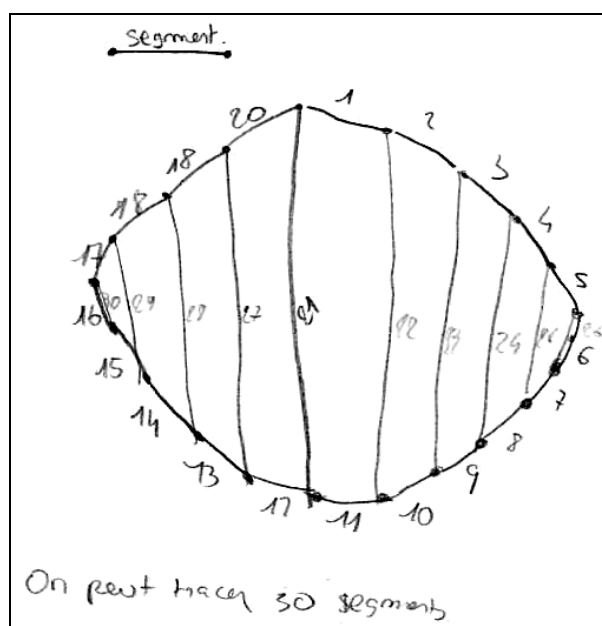
Le cas de cet élève relève de ce que nous avons nommé une subordination à une structure énumérative locale (cf. sous III.2.C.b, p. 75). Mais il y a d'autres formes d'échec à l'application de la réponse à  $n=4$  sur  $n=20$ . L'Exemple 71 nous montre ce que fait un élève qui cherche à résoudre le problème par une figure comme il l'a fait en  $n=4$  ; il cherche à calculer les segments possibles selon l'énumération corrigée ECC à partir de ses observations sur une figure mal structurée (tous les points ne sont pas reliés à A). Cet élève qui a organisé son énumération pour  $n=4$  à partir du quadrilatère a cherché à réutiliser cette forme géométrique pour  $n=20$ . Il semble débiter une énumération circulaire complétée d'une énumération systématique sans vraiment y parvenir puisque le point A n'est pas relié avec les autres points du même « côté » de la figure. L'utilisation du cercle comme patron d'énumération aurait probablement été plus efficace puisque l'élève aurait certainement perçu la possibilité de relier par des segments les points proches du point A. Cet élève présente certainement un cas de conflit non

résolu entre deux interprétations possibles de la situation qui se manifestent par la présence conjointe de l'énumération systématique et de l'énumération circulaire.



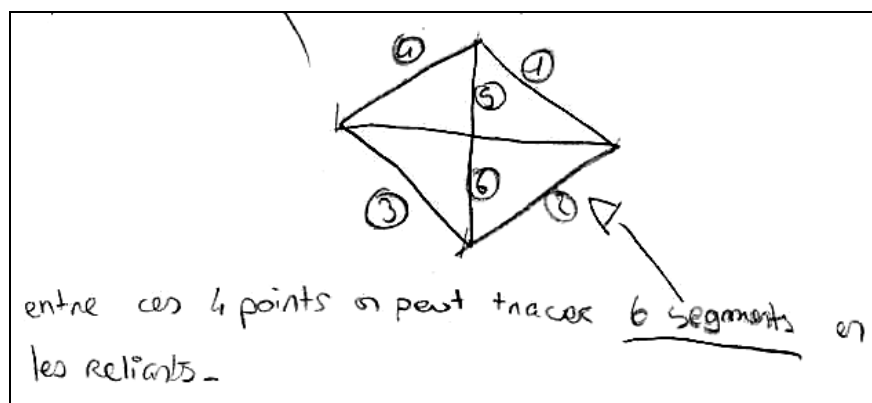
Exemple 71 : Elève 225, problème  $A_{\text{sgm}}$  4-20  $n=20$

Cependant, l'utilisation de la figure du cercle pour organiser l'inventaire ne garantit pas forcément le succès comme le montre la figure suivante.



Exemple 72 : Elève 306, problème  $A_{\text{sgm}}$  4-20  $n=20$ .

L'élève 306 de l'Exemple 73 semble avoir produit une énumération circulaire (segments 1 à 20) complétée d'une énumération partitive alors qu'auparavant, il avait relié chaque point aux trois autres pour  $n=4$  selon une procédure d'énumération circulaire complétée ECC, comme le montre l'Exemple 39 (cf. page 77). Cette procédure est valable pour des collections à petits effectifs. Réinvestie pour  $n=20$ , elle n'est plus opérationnelle et demande de la part de l'élève une élaboration plus poussée de la solution.



Exemple 73 : Elève 306, problème  $A_{sgm}$  4-20  $n=4$ .

Pour cet élève, la perception de la figure qu'il trace ne semble pas permettre une évolution de sa représentation du problème – contrairement à ce que nous pensions (cf. le commentaire sur la Figure 1, p. 53). Dans ce cas, la prégnance de la représentation du problème (centrée ici sur une énumération partitive) occulterait des possibilités, pourtant perceptibles, de segments entre les points.

L'Exemple 39 de la page 77 présente encore une possibilité de juxtaposition de procédures. Cet élève ne peut pas tracer tous les segments possibles pour chaque point du fait de la structure de la figure où les points sont alignés en deux colonnes (ou lignes) comme pour une énumération partitive. Il est possible qu'il ait commencé par produire un inventaire selon cette dernière procédure avant de chercher à compléter, point par point, les autres segments possibles. Cet élève avait aussi réussi le problème  $n=4$ .

Ce qui caractérise encore les réponses à  $A_{sgm}$  au niveau des procédures, c'est une importante mise en œuvre des énumérations circulaires et partitives (respectivement 28 et 26 cas sur 142). L'énumération circulaire est à peine plus importante quand  $n=4$  (14 cas sur 69) que quand  $n=20$  (14 cas sur 73).

Quand les élèves travaillent sur le problème  $n=20$  en premier (20-4), ils ont une forte tendance à privilégier l'énumération partitive (11 cas sur 33).

Ainsi les problèmes  $A_{sgm}$  induisent relativement « facilement » une activité combinatoire qui associe chaque objet de la collection à chacun des autres, surtout quand on peut les résoudre par une énumération sur figure ( $n=4$ ). Quand  $n=20$ , ce sont les énumérations partitives qui dominent sauf si l'élève a d'abord travaillé sur le problème  $n=4$ . Dans ce cas, les réponses se caractérisent encore par le respect du premier

critère de réussite mais sans réussir à déterminer une procédure pertinente. L'énumération circulaire est à peu près également répartie entre les différents problèmes.

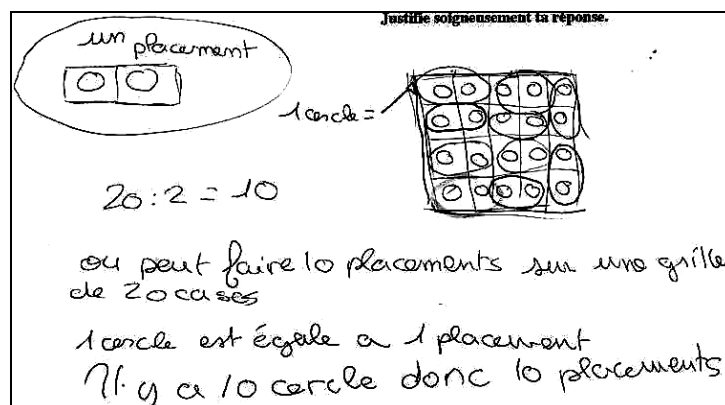
### C. Distribution de la variable procédures pour la modalité Dis

Les réponses aux problèmes Dis sont plutôt des réponses fausses (80 sur 122, soit 60,57 %). Les élèves ont surtout mis en œuvre l'énumération partitive (EP) qui domine sur les autres avec 48 réponses sur les 122 (soit 39,34 %). Les problèmes  $n=4$  comme les problèmes  $n=20$  sont concernés (respectivement 20 et 28 cas sur les 61, soit 32,79 % et 45,90 %).

Tableau XXI : Répartition des procédures selon les différents problèmes Dis.

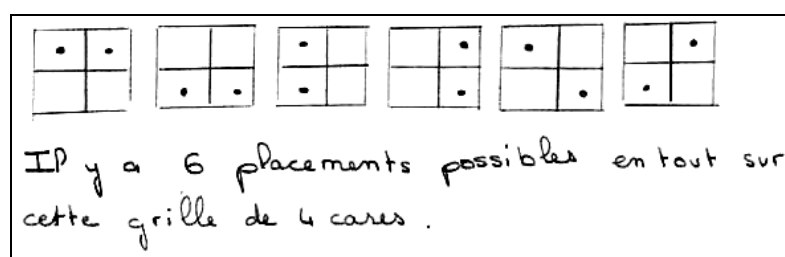
procédures problèmes		Réponses justes et intermédiaires						Réponses fausses			total
		ES	ECC	EPR	ECS	EI	ED	EC	EP	autres	
<u>4-20</u>	Réussis	0	0	7	4	8	-	-	-	-	19
	Erronés	0	0	0	0	0	0	1	8	4	13
	total	0	0	7	4	8	0	1	8	4	32
20- <u>4</u>	Réussis	1	0	0	0	2	-	-	-	-	3
	Erronés	0	0	2	0	0	2	0	1/12	10	26
	total	1	0	2	0	2	2	0	12	10	29
<u>20-4</u>	Réussis	0	0	0	0	0	-	-	-	-	0
	Erronés	0	1	0	0	0	2	1	16	9	29
	total	0	1	0	0	0	2	1	16	9	29
4- <u>20</u>	Réussis	3	1	0	0	0	-	-	-	-	4
	Erronés	0	0	0	0	0	5/9	1	12	6	28
	total	3	1	0	0	0	9	1	12	6	32
$n=4$		1	0	9	4	10	2	1	20	14	61
$n=20$		3	2	0	0	0	11	2	28	15	61
total		4	2	9	4	10	13	3	48	29	122

Il semblerait que les élèves qui ont travaillé sur les problèmes Dis n'aient pu se représenter la situation autrement qu'en juxtaposant spatialement les placements de deux jetons<sup>13</sup>. L'Exemple 74 illustre ce type de réponse.



Exemple 74 : Elève 309, problème Dis 20-4  $n=20$ .

Pour concevoir une situation où une case sert plusieurs fois, pour permettre des placements différents de deux jetons, il aurait certainement fallu que ces élèves introduisent dans leur représentation du problème l'idée d'une « successivité » quasi temporelle des possibles<sup>14</sup> comme le montre l'Exemple 75. Dans celui-ci, l'inventaire est représenté à partir de la même figure mais en six étapes successives.

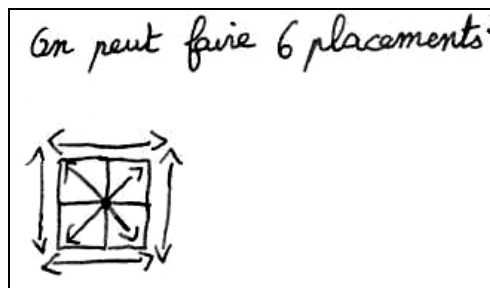


Exemple 75 : Elève 038, problème Dis 4-20  $n=4$ .

<sup>13</sup> Les problèmes Sél se caractérisent aussi par une présence très importante de l'énumération partitive mais pour d'autres raisons décrites ci-dessous (cf. III.5.E, p. 129).

<sup>14</sup> Le terme de « quasi temporalité » signifie que les élèves qui ont procédé de cette façon ont certainement dû introduire comme artifice nécessaire une successions possible de placements que le scénario de la situation ne demandait pas : le problème Dis ne renvoie pas par nature à un événement inscrit dans un déroulement temporel puisqu'il faut juste poser deux jetons. De cette façon, ils ont pu envisager et énumérer l'ensemble des possibles. Dans le cas contraire, par exemple, la situation de personnes se saluant présente bien un scénario qui se déroule dans le temps : les échanges de poignées de mains se succèdent jusqu'à ce que toutes les salutations aient été produites (cf. aussi sous les commentaires des exemples 12 à 14, p. 57)

Mais il est difficile d'affirmer que tous les élèves ayant réussi ce problème aient procédé de la sorte puisque certaines réponses justes présentent l'inventaire des possibles sans distinguer d'étapes successives (Exemple 76).



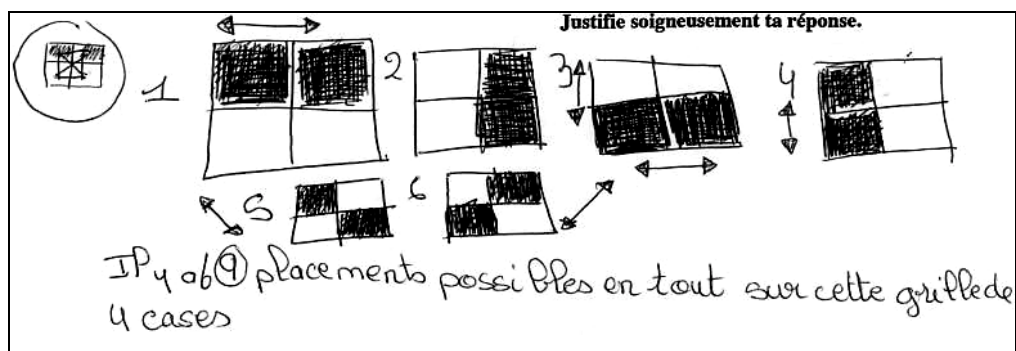
**Exemple 76 : Elève 249, problème Dis 4-20  $n=4$ .**

Quand ils n'ont pas eu recours à l'énumération partitive, les élèves qui ont travaillé sur le problème Dis ont surtout donné des réponses incohérentes puisqu'elles représentent 29 cas sur les 122, réparties de façon pratiquement égale entre  $n=4$  (14 cas) et  $n=20$  (15 cas).

Seuls les problèmes  $n=4$  travaillés en premier (4-20) présentent une répartition légèrement différente des procédures puisque 8 réponses mettent en œuvre une énumération indéterminée comme avec l'Exemple 76 et 7 réponses se caractérisent par une énumération partitive répétée comme le présente l'Exemple 75. L'énumération partitive semble donc être particulièrement associée aux problèmes Dis, pour des réponses fausses comme pour des réponses justes. Ces dernières, en répétant la partition de la grille avec des placements différents se distinguent, nous venons de le voir, par l'introduction d'un « quasi temps » pour énumérer la succession des configurations possibles (Exemple 77) ; cet artifice permet de penser chacune des cases de la grille comme associable, plusieurs fois, avec des cases différentes et de produire une activité combinatoire. C'est apparemment ce type de représentation du problème, très certainement structurée à partir d'un schème spécifique, qui induit l'activité combinatoire attendue.

On peut encore signaler, pour  $n=4$  en 4-20, quatre cas d'énumérations systématiques de type circulaires et systématique ECS comme celui-ci :





Exemple 77 : Elève 041, problème 4-20  $n=4$ .

Enfin, pour les problèmes relatifs à Dis, nous avons relevé un recours plus important qu'ailleurs aux propriétés de la proportionnalité (cf. sous III.2.C.f, p. 80) avec 5 cas pour  $n=20$  en 4-20 (bien que la différence avec les autres modèles combinatoires n'est certainement pas significative). Ce sont certains élèves ayant réussi le problème  $n=4$  par énumération qui ont recours à cette procédure. Quand  $n=20$ , cette procédure n'est plus adaptée et la solution demande d'engager des calculs. Ils produisent alors une réponse fautive en recourant aux instruments de modélisation liés au traitement de situations de proportionnalité (par exemple, l'utilisation d'un tableau de proportionnalité – cf. Exemple 42, p. 80). Ils connaissent relativement cette notion qu'ils étudient depuis environ cinq ans (depuis le CM1 – grade 8). Cependant, il est fort à parier que nous retrouvons dans ce cas d'utilisation non pertinente d'outils de modélisation les mêmes difficultés que ceux qui ont été évoqués avec les étudiants qui connaissent les formules de dénombrements élémentaires mais ne savent pas les appliquer. Nous avons évoqué cette question en introduction (cf. sous I.3.C, p. 20).

#### D. Distribution de la variable procédures pour la modalité Par

84 réponses sur les 134 relatives aux problèmes Par sont des réponses fausses (soit 62,69 %). Les élèves ont, dans l'ensemble, répondu soit par une énumération partielle (40 cas sur les 134, soit 29,85 %), soit par une réponse incohérente (42 cas, soit 31,34 %). Nous pouvons constater que cette répartition concerne aussi bien les problèmes  $n=4$  respectivement 16 et 14 cas sur 67) que les problèmes  $n=20$  (respectivement 24 et 28 cas sur 67).

**Tableau XXII : Répartition des procédures selon les différents problèmes Par.**

procédures problèmes		Réponses justes et intermédiaires						Réponses fausses			total
		ES	ECC	EPR	ECS	EI	ED	EC	EP	autres	
4-20	Réussis	2	1	2	0	1	-	-	-	-	6
	Erronés	1	3	0	0	0	11	0	6	7	28
	total	3	4	2	0	1	11	0	6	7	34
20-4	Réussis	5	0	2	0	1	-	-	-	-	8
	Erronés	0	3	0	0	0	3	2	10	7	25
	total	5	3	2	0	1	3	2	10	7	33
20-4	Réussis	1	1	0	0	0	-	-	-	-	2
	Erronés	1	4	0	0	0	2	0	15	8	30
	total	2	5	0	0	0	2	0	15	8	32
4-20	Réussis	0	0	0	0	0	-	-	-	-	0
	Erronés	3	2	0	0	0	1/1	0	9	20	35
	total	3	2	0	0	0	1	0	9	20	35
<i>n=4</i>		8	7	4	0	2	14	2	16	14	67
<i>n=20</i>		5	7	0	0	0	3	0	24	28	67
total		13	14	4	0	2	17	2	40	42	134

L'exemple suivant montre que cet élève n'a pas réussi à interpréter la situation en envisageant qu'un enfant puisse être plusieurs fois gendarme. Voici un extrait de ce qu'il a écrit et qui le montre :

*« [...] pour que chaque enfant (en équipe) le fasse chacun 1 fois (le gendarme)*

*(s'il n'y a jamais les mêmes enfants dans l'équipe de gendarme, qui le font plusieurs fois. Mais il seront plusieurs fois (19 fois pour un enfant) les voleurs.) »*

$20 : 2 = 10$   
 On pourra faire 10 répartitions différentes en tout avec ces 20 enfants car  
 dans 20 enfants il faut faire au moins 10 équipes de 2 gendarmes pour que  
 chaque enfant (en équipe) le fasse chacun - 1 fois (le gendarme)  
 (si il n'y a jamais les mêmes enfants dans l'équipe de gendarme, qui le font plusieurs fois  
 mais ils sont les rôles)  
 plusieurs fois :  
 (19 fois)  
 (par 20 fois)

Exemple 78 : Elève 072, problème Par 20-4  $n=20$ .

Quand les élèves mettent en œuvre une réponse qui relève d'une activité combinatoire, c'est pour présenter des énumérations défailtantes, essentiellement aux problèmes  $n=4$  (14 cas sur 67, contre 3 pour  $n=20$ ). Voici l'erreur qui s'observe plusieurs fois :

(noms) Enfants: A  
                   B  
                   C  
                   D  
 S'ai nommé les  
 enfants avec des  
 lettres pour les reconnaître.

Répartitions: AB - CD.  
                   AC - BD  
                   AD - BC  
 Il y aura 3 répartitions  
 différentes.

Exemple 79 : Elève 142, problème Par 4-20  $n=4$ .

Cet élève énumère bien l'ensemble des possibles selon une énumération systématique (incomplète), certainement en opposant une équipe contre l'autre (AB contre CD, etc.). Mais il semble occulter une partie de la situation de référence en ne considérant pas la nécessité de faire passer toutes les équipes ainsi constituées comme gendarmes. Nous avons déjà étudié ce type de réponse (cf. III.2.C.a, p. 75).

Nous trouvons aussi quelques énumérations systématiques complètes ES (13 cas sur 134, soit 9,70 %) et corrigée ECC (14 cas, soit 10,45 %) à peu près également réparties sur  $n=4$  et  $n=20$ . Elles montrent qu'une résolution sur 10 est réussie, ce qui permet certainement de repérer un groupe d'élèves qui disposent de connaissances opératoires relativement disponibles pour interpréter la situation comme relevant d'une activité

combinatoire. Pour rendre compte de la réponse des élèves qui ont divisé la collection en groupe de 2, nous pouvons faire l'hypothèse de la prégnance d'un schème de la partition qui serait plus facilement disponible alors que les connaissances opératoires liées aux dénombrement de combinaisons ne sont pas encore suffisamment installées. Cette hypothèse renvoie à une vision de l'activité mentale où les connaissances opératoires seraient en compétition dans l'interprétation d'une situation.

Cette question est proche de celle que nous avons évoquée à propos des outils de modélisation, comme nous l'avons fait ci-dessus pour rendre compte de l'utilisation de la proportionnalité (cf. p. 123). Dans ce dernier cas, le recours à des systèmes sémiotiques (par exemple : le tableau de proportionnalité avec application d'un coefficient, le produit en croix, et, parfois encore, la règle de trois) pour représenter et traiter la situation est relativement important d'autant plus que l'utilisation de ces outils est enseigné avec la notion même de proportionnalité. Bien que l'importance du registre sémiotique semble moins déterminante dans l'enseignement de la division et, donc, dans son utilisation, rien n'interdit de penser que la forme « dividende / diviseur = quotient + reste » puisse participer à la modélisation de la situation en permettant d'y identifier un dividende et un diviseur possibles. Il est évident que ce sont les connaissances opératoires liées à cette forme qui déterminent ces identifications. Nous avons évoqué ces rapports entre le signe et la pensée dans le cadre de la conceptualisation et de la résolution de problème en introduction (cf. sous I.3.C, p. 20).

## **E. Distribution de la variable procédures pour la modalité Sél**

Les réponses aux problèmes Sél sont les plus associées aux réponses fausses (96 cas sur 130 réponses recueillies, soit 81,54 %). Ces réponses ne sont pour ainsi dire que des énumérations partitives (82 cas, soit 63,08 %). ES et ECC sont quasiment les seules réponses justes qui se démarquent quelque peu avec environ 5 occurrences chacune pour les problèmes  $n=4$  et  $n=20$ . Les réponses incohérentes sont plus importantes avec 14 cas sur 130 (10,77 %). Il semblerait donc que nos problèmes Sél induisent de façon très importante l'énumération partitive quelque soit l'effectif de la collection : 37 cas sur 64 pour  $n=4$  (57,81 %) et 45 cas sur 66 pour  $n=20$  (68,18 %). A ce sujets, ils sont très proches des problèmes Dis. Cependant ils s'en distinguent par la nature même du

contexte sémantique et ce qu'elle induit comme interprétation erronée. Voici quelques exemples illustrant ce processus.

**Tableau XXIII : Répartition des procédures selon les différents problèmes Sél.**

procédures problèmes		Réponses justes et intermédiaires						Réponses fausses			total
		ES	ECC	EPR	ECS	EI	ED	EC	EP	autres	
<u>4-20</u>	Réussis	4	1	1	0	1	-	-	-	-	7
	Erronés	1	3	0	0	0	0	0	18	2	24
	total	<b>5</b>	<b>4</b>	1	0	1	0	0	<b>18</b>	2	31
<u>20-4</u>	Réussis	1	0	0	0	1	-	-	-	-	2
	Erronés	0	1	0	0	0	0	0	29	1	31
	total	1	1	0	0	1	0	0	<b>29</b>	1	33
<u>20-4</u>	Réussis	0	0	0	0	0	-	-	-	-	0
	Erronés	0	3	0	0	0	0	0	28	4	35
	total	0	3	0	0	0	0	0	<b>28</b>	4	35
<u>4-20</u>	Réussis	3	1	0	0	0	-	-	-	-	4
	Erronés	1	1	0	0	0	1/1	0	17	7	27
	total	<b>4</b>	2	0	0	0	1	0	<b>17</b>	7	31
<u>n=4</u> <u>n=20</u>		6	5	1	0	2	0	0	<b>37</b>	3	64
		4	5	0	0	0	1	0	<b>45</b>	11	66
	total	10	10	1	0	2	1	0	<b>82</b>	14	130

L'Exemple 80 présente la justification d'un élève qui met en œuvre une énumération partitive :

*« Avec ces 20 enfants, il est possible de faire 10 équipes de 2 gendarmes car [...] il y aura 18 voleurs à chaque fois mais, à chaque fois, il y aura deux nouveaux gendarmes. »*

Bien qu'il semble se représenter la situation en plusieurs jeux avec, à chaque fois, une nouvelle équipe de deux gendarmes, cet élève ne paraît pas concevoir qu'un enfant puisse être plusieurs fois gendarme dans des équipes différentes.

Avec ces 20 enfants il est possible de faire 10 équipes de 2 gendarmes car si on fait 10 équipes de 2 gendarmes il y aura 18 voleurs à chaque fois mais à chaque fois il y aura deux nouveaux gendarmes.

Exemple 80 : Elève 082, problème Sél 4-20  $n=20$ .

L'Exemple 81 présente la justification d'un élève qui cherche le nombre d'équipes possibles permettant à chaque enfant de jouer comme gendarme, sans concevoir non plus de mélanges d'équipes. Sa réponse relève bien d'une énumération parti-  
tive :

« Une équipe de gendarmes doit compter 2 gendarmes donc il faut faire 10 équipes de 2 gendarmes pour que les 20 enfants puissent être chacun dans des équipes. »

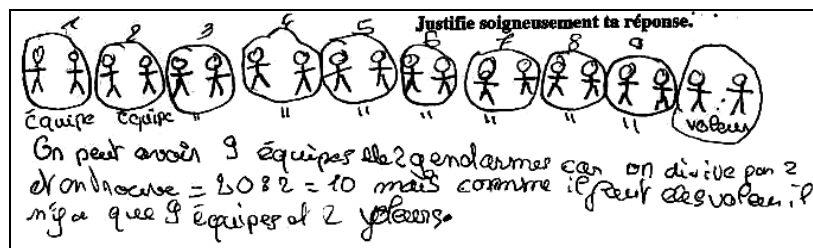
Une équipe de gendarme doit compter 2 gendarmes donc il faut faire 10 équipes de 2 gendarmes pour que les 20 enfants puissent être chacun dans des équipes.

Exemple 81 : Elève 077, problème Sél 4-20  $n=20$ .

Dans cet exemple, les équipes semblent donc juxtaposées comme s'il fallait faire jouer les 20 enfants comme gendarmes en même temps. Dans ce cas, il n'est pas possible de concevoir un enfant jouant dans deux équipes différentes. Cette absence de temporalité se trouve de façon plus évidente dans les exemples qui vont suivre.

Ainsi, dans l'Exemple 82, le souci de garder des voleurs permet de penser que cet élève ne conçoit qu'une seule partie avec 9 équipes de 2 gendarmes contre deux 2 voleurs résiduels :

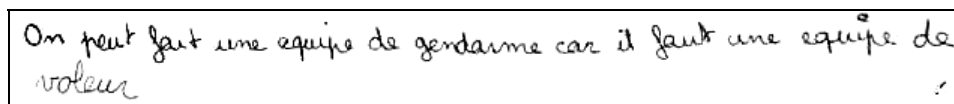
« [...] on trouve  $20 : 2 = 10$  mais comme il faut des voleurs il n'y a que 9 équipes et 2 voleurs. »



Exemple 82 : Elève 314, problème Sél 4-20  $n=20$ .

On retrouve avec  $n=4$  ce souci de garder des voleurs dans une représentation du jeu en une seule partie comme le montre l'Exemple 83, ci-dessous. Ce type de réponse a déjà été évoqué (cf. p. 88).

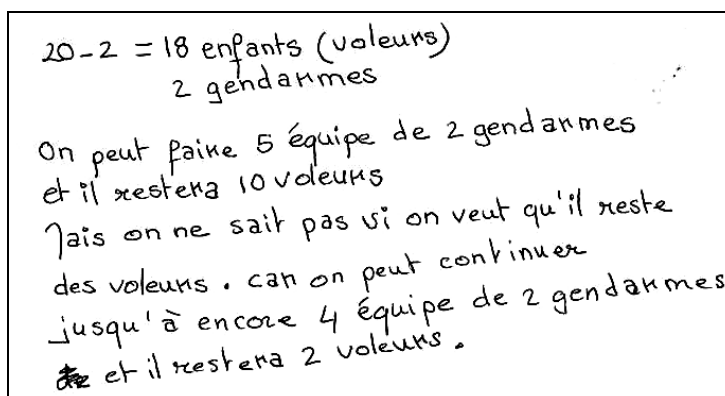
« On peut faire une équipe de gendarmes car il faut une équipe de voleurs. »



Exemple 83 : Elève 161, problème Sél 20-4  $n=4$ .

Cette interprétation de l'énoncé qui introduit des données imaginaires peut correspondre à une forme de résistance à l'idée selon laquelle chaque objet de la collection peut s'apparier avec chacun des autres. Il est possible que ces élèves transforment les données du problème pour les accommoder aux schèmes de traitement dont ils disposent, alors qu'ils sont dans l'incapacité d'en construire de nouveaux. Voici une autre « réinterprétation » de l'énoncé, celle du partage des enfants en deux camps :

« On peut faire 5 équipes de 2 gendarmes et il restera 10 voleurs. Mais on ne sait pas si on veut qu'il reste des voleurs car on peut continuer jusqu'à encore 4 équipes de 2 gendarmes et il restera 2 voleurs. »



Exemple 84 : Elève 152, problème Sél 4-20  $n=20$ .

L'Exemple 84, comme le précédent, montre une interprétation fautive de l'énoncé alors que ce dernier semble clair : « Il faut une équipe de deux gendarmes. » (cf. l'énoncé du problème p. 35). Cet élève cherche d'abord à partager équitablement les enfants en deux « camps », celui des gendarmes où les enfants sont associés par deux et celui des voleurs (cette interprétation de l'énoncé peut être expliquée par l'Exemple 86). Puis il s'interroge sur la nécessité de garder des voleurs : « Mais on ne sait pas si on veut qu'ils restent des voleurs. » Et il augmente autant que possible les effectifs du camp des gendarmes par groupes de deux enfants pris dans le camp des voleurs.

Il est possible que certains élèves qui procèdent par énumération partitive (EP) avec Sel, juxtaposent ainsi des équipes de deux gendarmes sans même tenir compte de voleurs résiduels possibles.

L'Exemple 85 montre un autre élève qui n'arrive certainement pas à concevoir le jeu dans le temps. Il semble aussi penser qu'il faut un certain nombre d'équipes de gendarmes en même temps ce qui est incompatible avec l'existence du groupe de voleurs : « Mais il faut aussi des voleurs alors combien d'équipes de chaque ? ». Par conséquent, il trahit un doute sur son interprétation de la situation par rapport à ce qui est demandé puisqu'il fait référence à l'énoncé : « Dans l'énoncé, cela dit : il faut une équipe de 2 gendarmes [...] ». Il semble incapable de penser plusieurs parties successives avec changements d'équipes de gendarmes d'où sa conclusion : « [...] alors peut être qu'il en faut qu'une seule [équipe de gendarmes] ? »

20 ÷ 2 = 10 équipes de gendarmes sont possibles.  
 Mais il faut aussi des voleurs alors combien d'équipes de chaque ?  
 Dans l'énoncé, cela dit : Il faut une équipe de 2 gendarmes alors  
 peut-être qu'il en faut qu'une seule ?

Exemple 85 : Elève 162, problème Sél 20-4 n=20.

L'Exemple 86 montre que les élèves peuvent se représenter la situation en 2 camps de 10 joueurs, celui des gendarmes et celui des voleurs, dès la première phrase de l'énoncé du problème. Cette inférence (annoncée par « ... donc... ») vient dès la première phrase de l'énoncé : « Enoncé : il y a 20 enfants. Ils jouent aux gendarmes et aux voleurs. **Donc** il y aura 10 enfants gendarmes et 10 voleurs. [...] »



Puis, en lisant la suite de l'énoncé, cet élève change d'interprétation : « *Mais il faut trouver combien d'équipes de gendarmes peut-on faire avec ces 20 enfants sachant qu'une équipe est composée de 2 gendarmes.* » Et il met alors en œuvre une procédure partitive sous la forme d'une multiplication « à trou » ( $2 \times \dots = 20$ ) et il trouve 10 équipes possibles.

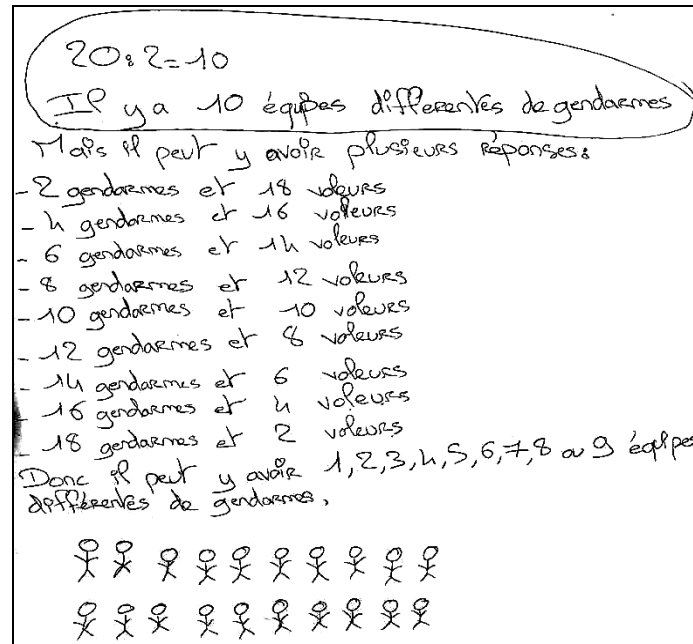
Cette idée de juxtaposition d'équipes en un seul jeu peut rester malgré la suite de l'énoncé. Elle influence de façon assez forte l'interprétation de la situation pour empêcher de considérer cette dernière comme une succession de jeux avec une seule équipe de deux gendarmes dont la composition change à chaque fois. Avec une telle interprétation de la situation, il est difficile de mettre en œuvre une activité combinatoire.

Enoncé: il y a 20 enfants. il joue au gendarmes et aux voleurs.  
 Donc il y aura 10 enfants gendarmes et 10 voleurs.  
 Mais il faut trouver combien d'équipes de gendarmes peut-on faire avec ses 20 enfants sachant que chaque équipe est composée de 2 gendarmes.  
On réfléchit: Ahou on se dit que  $2 \times 10 = 20 \dots$  (enfants).  
conclusion: De ce fait il y aura 10 équipes de 2 gendarmes.

Exemple 86 : Elève 293, problème Sél 20-4  $n=20$ .

L'Exemple 87 présente une autre forme de « réinterprétation » du contenu de l'énoncé. Au contraire du cas précédent, l'élève commence par une procédure partitive qu'il rejette (elle est entourée, comme c'était stipulé dans les consignes de passation), puis il énumère les compositions possibles des deux « camps » sachant que les gendarmes sont organisés par groupes de 2 :

« 2 gendarmes et 18 voleurs  
 4 gendarmes et 16 voleurs  
 6 gendarmes et 14 voleurs  
 etc. »



Exemple 87 : Elève 319, problème Sél 20-4  $n=20$ .

Il est difficile de rendre compte de toutes ces interprétations et « réinterprétation » liées à la fois au contexte sémantique des problèmes de sélection et à l'état des connaissances opératoires disponibles chez les élèves. Ces réponses ne comportent pas suffisamment de justifications qui nous permettraient d'avancer des hypothèses relativement précises à ce sujet. Cette question justifie la deuxième expérience que nous avons menée et organisée de manière à ce que les élèves soient incités à expliciter des justifications. Avant de la présenter, il convient de clore cette partie en présentant un certain nombre d'observations relatives à la variation des réponses entre les deux problèmes de l'épreuve.

## 6. Variation des réponses entre les deux problèmes de l'épreuve

Notre expérimentation permet essentiellement d'observer, rappelons-le, les effets produits par les propriétés des différents modèles combinatoires implicites sur le dénombrement de combinaisons de 2 objets pris parmi  $n$ . Dans ce but, chaque épreuve est constituée de deux énoncés selon que l'effectif de la collection est égal à 4 ou à 20.

Il est raisonnable de penser qu'un sujet réinvestisse plus ou moins consciemment dans le deuxième problème l'expérience acquise et les interprétations de l'énoncé pro-

duites au cours de son premier travail. Afin de neutraliser tout effet d'ordre, l'expérimentation est organisée en deux modalités de passation selon que le premier problème est  $n=4$  (modalité 4-20) ou  $n=20$  (modalité 20-4).

Or nous avons vu précédemment (cf. sous III.4.B.a, p. 111) que le fait de commencer par travailler sur un problème  $n=4$  (4-20) n'augmente pas les chances de résolution du problème  $n=20$ . Cela se conçoit facilement en cas d'échec au premier problème. Mais il est nécessaire de voir ce qui se passe quand le premier problème est réussi mais pas le second. Une analyse de notre corpus en terme d'évolution des réponses s'impose donc.

Cette analyse peut se faire en terme de progrès, de stabilité ou de régression selon la variation observée dans les réponses entre le premier et le deuxième problème de l'épreuve. Succinctement, on peut dire qu'il y a progrès si l'échec au premier problème est suivi d'un succès au second, il y a stabilité s'il y a réussite ou échec aux deux problèmes et il y a régression si une réussite au premier problème est suivie d'un échec au second. Il est évident que ces trois notions n'ont pas le même sens selon qu'il s'agit de la modalité 20-4 ou 4-20 puisque les modes de raisonnement et de validation ne sont pas les mêmes pour les deux problèmes (cf. sous II.1, p. 35).

L'analyse statistique des performances (cf. sous III.4.B, p. 108) permet de distinguer entre les réponses à  $n=4$  et à  $n=20$  – ces dernières étant significativement moins réussies que les premières. Elle montre aussi une différence caractéristique pour  $n=4$  selon que le problème est résolu en premier (plus de réussites) ou en second (moins de réussites). Une régression et une stabilité dans l'échec se conçoivent donc plus facilement en 4-20 qu'en 20-4. En contre partie, et pour les mêmes raisons, un progrès et une stabilité dans la réussite semblent plus évidents en 20-4 qu'en 4-20.

Ces hypothèses doivent être complétées en considérant aussi la nature des modèles combinatoires implicites en jeu. L'analyse statistique indique aussi, rappelons-le, que ce facteur produit des effets significatifs sur la réussite à l'épreuve. Pour l'ensemble de l'épreuve, comme nous l'avons vu, ils se hiérarchisent par ordre de difficulté croissante de la façon suivante : association – salutations ( $A_{slt}$ ), association – segments ( $A_{sgm}$ ), partition (Par), distribution (Dis) et sélection (Sél).

Par conséquent, il est possible de penser que, dans le cadre d'une étude portant sur la variation des réponses entre les deux problèmes, un modèle combinatoire implicite plutôt associé à des réponses fausses serait plutôt liée à la régression. Il amplifierait donc les effets liés à l'effectif  $n$ , présentés ci-dessus.

A contrario, moins un modèle combinatoire implicite est associé aux réponses fausses, et plus il serait générateur de progrès, plus il limiterait les régressions et plus il stabiliserait la réussite entre les deux problèmes de l'épreuve. Un tel modèle combinatoire implicite réduirait plutôt les effets prévus, liés à  $n$ .

L'analyse suivante étudie la validité de ces hypothèses.

### **A. Principes de l'analyse**

Il s'agit donc de rendre compte de la façon dont le travail produit au cours de la résolution du premier problème agit sur l'élaboration de la réponse au deuxième problème selon les modalités liées à l'ordre de résolution et aux modèles combinatoires implicites.

Pour constituer cette analyse, il est nécessaire d'établir une hiérarchisation des réponses qui puisse rendre compte de variations entre le premier et le deuxième problème de l'épreuve. Pour cela nous utilisons les critères utilisés pour l'analyse des performances (cf. sous III.2, p. 58). Les réponses, rappelons-le, sont ainsi qualifiées de « justes », « d'intermédiaires » ou de « fausses ».

Seules les réponses « justes » donnent de façon exhaustive et sans redondances le nombre de combinaisons possibles de deux objets pris parmi les  $n$  objets de la collection. Elles peuvent être distinguées selon qu'elles sont de nature de leur réalisation : empirique (énumérations sur liste ou sur figure), arithmétique (calculs) ou mixtes (les sujets présentent une réponse constituée à la fois d'une énumération sur figure et de calculs).

Les réponses « intermédiaires », quant à elles, bien que relevant d'une activité combinatoire telle que nous l'avons défini précédemment (cf. page 41), sont évidemment fausses puisqu'elles ne dénombrent pas des combinaisons sans répétition de 2 objets pris parmi 4 ou 20. Plus précisément, nous distinguons les réponses « intermédiaires supérieures » qui énumèrent des groupes ordonnés (arrangements) ou / et constitués du

même objet (répétitions), des réponses « intermédiaires inférieures » qui présentent une organisation défailante de l'énumération et donc des dénombrements incomplets. Les réponses qualifiées de « fausses » ne présentent aucune « activité combinatoire » apparente.

A présent, il est possible d'affiner les définitions de « progrès », de « stabilité » et de « régression » des réponses entre les deux problèmes. Nous parlons de « progrès » quand les réponses au deuxième problème sont d'un niveau supérieur à celles du premier problème :

- Intermédiaire inférieure → intermédiaire supérieure.
- Intermédiaires → justes.
- Fausses → justes.
- Fausses → intermédiaires.

Nous parlons de « stabilité » quand les réponses au deuxième problème sont du même niveau :

- Justes → justes.
- Intermédiaires supérieures → intermédiaires supérieures.
- Intermédiaires inférieures → intermédiaires inférieures.
- Fausses → fausses.

Nous parlons de « régression » quand les réponses au deuxième problème présentent un niveau inférieur à celles l'autre problème :

- Justes → intermédiaires.
- Justes → fausses.
- Intermédiaires → fausses.
- Intermédiaires supérieures → intermédiaires inférieures.

## **B. Résultats**

Les tableaux suivants présentent la distribution des différents cas de variation des réponses par modèle combinatoire implicite pour les modalités 4-20 et 20-4.

**Tableau XXIV : Variation des réponses en 4-20 pour chaque modèle combinatoire implicite.**

n=4	→	n=20	A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	Dis	Par	Sél	effectifs	pourcent.
justes		juste calcul	1	0	0	0	0	1	0,6 %
		justes mixtes	5	2	4	0	2	13	8,1 %
		justes énumérations	0	1	0	0	2	3	1,9 %
		intermédiaires	3	7	1	3	0	14	8,7 %
		fausses	5	13	14	12	3	47	29,2 %
intermédiaires		juste mixte	0	0	0	0	1	1	0,6 %
		intermédiaires	9	0	0	1	1	11	6,8 %
		fausses	6	0	0	5	2	13	8,1 %
fausses		fausses	3	9	13	13	20	58	36,0 %
TOTAL			32	32	32	34	31	161	100,0 %

**Tableau XXV : Variation des réponses en 20-4 pour chaque modèle combinatoire implicite.**

n=20	→	n=4	A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	Dis	Par	Sél	effectifs	pourcent.
justes calculs			4	2	0	2	0	8	5,1 %
justes mixtes	justes		2	1	0	1	0	4	2,5 %
justes énumérations			1	1	0	0	0	2	1,3 %
Intermédiaires		justes	6	4	1	1	2	14	8,8 %
		intermédiaires	11	1	0	3	1	16	10,1 %
		fausses	0	1	0	2	0	3	1,9 %
Fausses		justes	2	4	3	6	0	15	9,5 %
		intermédiaires	0	0	2	1	0	3	1,9 %
		fausses	11	16	23	17	30	97	61,4 %
TOTAL			34	30	29	32	33	158	100 %

### a. Stabilité

#### • Effets lié à l'ordre de résolution des problèmes.

D'une façon générale, les réponses sont principalement stables entre les deux problèmes (justes → justes, intermédiaires → intermédiaires, fausses → fausses), et de manière plus importante pour la modalité 20-4 (5,1 % + 2,5 % + 1,3 % + 10,6 % + 61,4 % = 80,4 % des cas) que pour la modalité 4-20 (0,6 % + 8,1 % + 1,9 % + 6,8 % + 36 % = 53,4 % des cas). Les progrès concernent surtout l'épreuve 20-4 (8,8 % + 9,5 % + 1,9

% = 17,1 %) contre 0,6 % en 4-20. Par contre, les régressions concernent surtout l'épreuve 4-20 ( $8,7 \% + 29,2 \% + 8,1 \% = \underline{42,3 \%}$ ) que 20-4 (1,9 %).

Ces différences étant importantes, nous faisons l'hypothèse qu'elles ont du sens. Les sujets semblent donc plutôt réinvestir de façon privilégiée l'interprétation de la situation élaborée au premier problème sur le second, qu'elle soit juste ou fausse. Cette observation générale demande cependant à être nuancée et précisée.

D'une part, on observe que cette stabilité concerne principalement la forme « fausses → fausses », et de façon presque deux fois plus importante pour 20-4 que pour 4-20 (respectivement 61,4 % contre 36 % des cas). Cela permet de penser que le travail produit pour  $n=20$  inscrit de façon plus prégnante une interprétation non pertinente et, très souvent, peu cohérente de la situation. Cette interprétation fausse de la situation serait prioritairement réinvestie à  $n=4$ , produisant un effet d'écran dans une situation qui connaît pourtant, sur l'ensemble des protocoles recueillis, plus de réponses justes ou intermédiaires qu'avec  $n=20$ . Nous confirmons donc ici ce qui avait été déjà souligné ci-dessus (cf. sous III.3.B, p. 97).

D'autre part la stabilité de réponses est à peu près équivalentes pour les deux modalités à la fois pour « justes → justes » ( $0,6 \% + 8,1 \% + 1,9 \% = \underline{10,6 \%}$  pour 4-20 et  $5,1 \% + 2,5 \% + 1,3 \% = \underline{8,9 \%}$  pour 20-4) et « intermédiaires → intermédiaires » (6,8 % pour 4-20 et 7 % pour 20-4).

Dans le premier cas, nous pouvons penser qu'il s'agit là des sujets les plus performants en matière de dénombrement de combinaisons. Ils sont donc peu sensibles aux particularités du contexte sémantique. Pour la même raison, la stabilité « intermédiaires → intermédiaires » correspond à un groupe d'élèves ayant des connaissances opératoires suffisamment solide pour interpréter l'énoncé du problème de façon assez pertinentes. Pour ces raisons, nous les considérons comme proches du groupe des élèves les plus performants. Il semble donc évident qu'il était pertinent de différencier les réponses « intermédiaires » des réponses « fausses » même s'il s'agit, dans les deux cas, de résultats erronés.

- *Effets liés à la nature des différents modèles combinatoires implicites.*

Dans le cas de stabilité « fausses → fausses », tous les modèles combinatoires implicites sont concernés ; mais ils présentent des valeurs extrêmes qui varient de 3 fois en 20-4 (de 11 cas pour  $A_{slt}$  à 30 cas pour Sél) à 7 fois pour 4-20 (de 3 cas pour  $A_{slt}$  à 20 cas pour Sél). Une telle hiérarchie entre les modèles combinatoires implicites pourrait donc correspondre à une échelle de difficulté de traitement. Cette difficulté semble rendre impossible tout changement d'interprétation du contenu des énoncés. Un tel effet du contexte sémantique est donc le plus important pour les problèmes Sél et le plus faible pour les situations  $A_{slt}$ .

En 4-20, « justes → justes » concerne tous les modèles combinatoires implicites à l'exception de Par (0 cas) :  $A_{slt}$  (6 cas),  $A_{sgm}$  (3 cas sur 17), Dis (4 cas) et Sél (4 cas). Cette exception est liée au fait qu'en général, pour Par, les sujets qui donnent des réponses justes à  $n=4$  régressent après, surtout pour une réponse de type « Fausses ». C'est avec ce modèle combinatoire implicite qu'il semble le plus difficile de réinvestir une interprétation pertinente.

En 20-4, « justes → justes » est principalement le fait de  $A_{slt}$  (7 cas sur 14),  $A_{sgm}$  (4 cas) et Par (3 cas) mais pas celui de Dis, ni celui de Sél (0 cas) qui sont surtout associés à des stabilités « fausses → fausses ». Ces deux modèles implicites semblent donc introduire dans la situation des relations particulièrement difficiles à interpréter à tel point qu'un échec à  $n=20$  ne peut se rattraper à  $n=4$  comme si l'énoncé était devenu particulièrement peu transparent.

La stabilité « intermédiaires → intermédiaires » en 4-20 comme en 20-4 concerne principalement et de façon relativement importante le modèle combinatoire implicite  $A_{slt}$ . (9 cas sur 11 dans le premier cas et 11 sur 16 dans le second). Cette observation n'est pas surprenante compte tenu du fait que ce modèle combinatoire implicite présente le plus de stabilité « justes → justes ».

## **b. Régression**

- *Effets liés à l'ordre de résolution des problèmes.*



Un autre résultat important concerne, de façon assez substantielle, les régressions liées à la modalité 4-20 ( $8,7 \% + 29,2 \% + 8,1 \% = 46,0 \%$  des cas contre seulement  $1,9 \%$  pour 20-4). Et ce sont surtout les régressions « justes  $\rightarrow$  fausses » qui dominent ( $29,2 \%$  des cas) .

Une réponse juste à  $n=4$  ne garantit donc en rien une réponse juste en  $n=20$ . Le fait de travailler, même avec succès, sur une situation de même classe, mais numériquement moins difficile ( $n=4$ ), ne semble pas permettre un réinvestissement automatique de l'interprétation pertinente de la situation au deuxième problème. Les élèves n'ont pas réussi à déterminer une procédure juste spécifique pour  $n=20$  alors qu'ils possèdent une interprétation pertinente de la situation (celle qui leur a permis de réussir à  $n=4$ ). Le recours au calcul, adéquat quand  $n=20$ , semble poser problème aux élèves dans ce cas. Faut-il voir dans ce cas l'incapacité d'échapper à la prégnance d'une solution réalisée par une énumération sur liste ou sur figure ? C'est très probable puisque cette dernière relève d'une pensée « empirique », plus facilement mobilisable, comme nous l'avons déjà évoqué (cf. sous III.4.A, p. 100).

• *Effets liés à la nature des différents modèles combinatoires implicites.*

Cette prépondérance de la réponse « justes  $\rightarrow$  fausses » en 4-20 concerne de façon à peu près égale les modèles combinatoires implicites Dis (14 cas),  $A_{sgm}$  (13 cas) et Par (12 cas). Sél et Ard, quant à elles, présentent certaines particularités :

Si Sél ne présente que 3 cas, c'est que ce modèle combinatoire implicite ne permet que très peu de régressions possibles puisqu'il se caractérise surtout par un échec important et stable (« fausses  $\rightarrow$  fausses »).

$A_{slt}$  est peu concernée par la régression « justes  $\rightarrow$  fausses » en 4-20 (5 cas). Ce modèle combinatoire implicite étant moins complexe à traiter en obtenant les meilleures moyennes générales, elle présente surtout une stabilité de traitement entre le premier et le deuxième problème pour la modalité 4-20 (18 cas sur 32).

**c. Progrès**

Les sujets qui connaissent un progrès entre les deux problèmes sont surtout ceux qui ont d'abord travaillé sur l'énoncé  $n=20$  puisque les progrès en 20-4 sont encore rela-

tivement importants (8,8 % + 9,5 % + 1,9 % = 20,2 % des cas) et dépassant largement 4-20 (quasiment insignifiants : 1 cas sur 161). Il s'agit de « fausses → justes » qui domine en 20-4 (9,5 % des cas).

Ce progrès est essentiellement le fait de Par (6 cas sur les 15) et  $A_{sgm}$  (4 cas sur les 15). Comme si, pour les problèmes caractérisés par ces modèles combinatoires, le travail produit en  $n=20$ , même non pertinent, n'empêchait pas ou participait à une meilleure interprétation de la situation avec  $n=4$ . Le progrès « intermédiaires → justes » vient juste après (8,8 % des cas) et concerne plutôt  $A_{slt}$  (6 cas sur 9) ce qui, une fois de plus, ne nous surprend pas compte tenu de la relative transparence de l'énoncé qui relève de ce modèle combinatoire implicite et que nous avons constaté ci-dessus.

**Tableau XXVI : Pourcentages des différentes formes de progrès selon les modalités de passation.**

Modalité de passation	4-20	20-4
Evolution des réponses		
intermédiaires → justes	0,6 %	8,8 %
fausses → justes	0,0 %	9,5 %
fausses → intermédiaires	0,0 %	1,9 %
TOTAL	0,6 %	20,2 %

## IV. L'expérience « Atelier de résolution de problèmes »

Rappelons que notre projet général concerne l'étude de résolutions de certains problèmes de dénombrement élémentaires par des élèves de 4<sup>ème</sup>. Ces derniers doivent dénombrer des combinaisons de 2 objets pris parmi  $n$ . Une première expérience, l'épreuve « Devoir sur table », a permis de poser un certain nombre de repères dans ce domaine et de préciser un certain nombre de questions que nous rappelons ci-dessous. Ces dernières concernent non seulement les processus en jeu dans l'élaboration de la réponse mais aussi l'effet lié aux caractéristiques sémantiques des énoncés de problème sur ces processus. Voyons donc ces quelques points avant de présenter cette deuxième expérience.

### 1. Présentation de l'expérience

#### A. Les apports de l'expérience « Devoir sur table »

L'épreuve « devoir sur table » a constitué une première étape dans cette recherche sur la résolution de problèmes de dénombrements élémentaires. Cette expérience a permis de déterminer deux choses :

D'une part, nous avons vérifié la présence dans nos situations d'un effet de nature sémantique jouant dans les processus en jeu au cours de l'activité de résolution. Il s'agit là d'un effet mis en évidence par Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (1997) à partir des travaux théoriques de Dubois (1984). Cet effet est lié à la nature particulière de chaque modèle combinatoire implicite (c'est-à-dire la manière de constituer des configurations) et Batanero, Godino et Navarro-Pelayo en distinguent trois auxquels nous avons ajouté un quatrième. Il y a ainsi la distribution de 2 objets dans  $n$  cases, la partition de la collection en un groupe de 2 et un groupe de  $n - 2$  objets, la sélection d'un échantillon de 2 objets parmi  $n$  mais aussi l'association 2 à 2 des  $n$  objets que nous avons ajouté aux trois précédents). Ces configurations, nous les avons introduites expérimentalement en tant que modalités d'une variable dépendante. Des différences significatives de performance les distinguent effectivement – en particulier les situations d'association les mieux réussies s'opposent aux situations de partition et de sélection

qui présentent les moins bons scores. Nous avons introduit dans cette recherche la configuration « association » qui ne se trouve pas dans les travaux précédents et nos résultats montrent qu'il s'agit bien d'un nouveau modèle combinatoire implicite auquel n'avaient pensé ni Dubois, ni Batanero, Godino et Navarro-Pelayo.

D'autre part, nous avons recensé les procédures (qu'elles soient pertinentes ou non) qui caractérisent les réponses recueillies. Cette dimension de la résolution ne se trouve pas dans les travaux empiriques de Batanero, Godino et Navarro-Pelayo essentiellement basés sur les performances. Les principales procédures sont : l'énumération systématique associée au calcul :  $n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1$ , l'énumération d'arrangements et l'énumération corrigée associée respectivement aux calculs  $n.n-1$  et  $(n.n-1)/2$ , l'énumération partitive associée au calcul  $n/2$  et l'énumération circulaire. Ces procédures se retrouvent dans d'autres travaux, en particulier ceux de Maury et Fayol (1986). Il existe bien sûr d'autres types de réponses beaucoup plus marginales. Toutes ces procédures sont étudiées dans la partie concernant la première expérience.

D'une façon générale, ces procédures se retrouvent mises en œuvres dans toutes les situations mais de façon variable. Les réponses justes (qui dénombre des combinaisons) et intermédiaires (qui dénombrent des arrangements, des combinaisons avec répétition ou non exhaustives) sont plutôt majoritaires dans les situations d'association alors que les réponses fausses dominent largement dans les situations de partition et de sélection.

## **B. Les questions qui se posent encore**

Les résultats précédents permettent de penser que ces différentes procédures se mettent en concurrence au cours de l'élaboration de la solution. Il est alors fort possible que les caractéristiques sémantiques des différentes situations favorisent ou bien freinent l'émergence de telle ou telle procédure au détriment ou au bénéfice des autres. Cela expliquerait l'effet lié au contexte sémantique dont nous cherchons à appréhender le fonctionnement.

Cette interprétation demande à être vérifiée par une approche qualitative du travail de résolution effectué par les élèves. Les réponses (uniquement écrites) apportées par l'épreuve « Devoir sur table » n'autorisent qu'une analyse en terme de procédures et

de performances<sup>15</sup>. Et un certain nombre d'incertitudes demeurent à la fois sur la façon dont cet effet de nature sémantique intervient dans l'élaboration de la solution. Il est donc nécessaire de passer d'une approche simplement descriptive, à une approche plus dynamique, plus fonctionnelle, qui cherche à voir comment se justifient ces différences entre réponses selon les situations traitées. Deux orientations se dégagent alors.

D'abord, dans la mesure où cette recherche porte sur un effet de nature sémantique, il s'agit de l'observer à l'endroit même où il opère, c'est-à-dire pendant l'élaboration de la réponse. Le premier objectif de notre travail consiste donc à mettre en évidence des modèles de résolution qui permettent de rendre compte des rapports entre un certain nombre d'observables : d'une part, les caractéristiques du contexte sémantique tant au niveau des propriétés des objets qu'à celui des relations entre ces objets (les modèles combinatoires implicites), d'autre part, les différentes solutions mises en œuvre pour répondre au problème posé. Ces réponses renvoient à des organisations spécifiques de l'activité, des procédures de traitement associées à des significations élaborées par les élèves au cours de l'interprétation du contenu de l'énoncé.

Ensuite, au niveau des particularités sémantiques de la situation, l'expérience « devoir sur table » ne permet pas de distinguer clairement dans les réponses ce qui est directement liée aux caractéristiques de chaque modèle combinatoire implicite (et relève donc d'une sémantique des relations) de ce qui revient aux propriétés des objets en jeu (des personnes qui se saluent, des enfants jouant aux gendarmes et aux voleurs, des points reliés par des segments, des cases de grilles que l'on coche). Les travaux de Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (ibid.) et Maury et Fayol (ibid.) confirment l'effet sémantique lié à la nature des objets des collections données. Or les situations de partition et de sélection qui présentent entre elles des écarts de performance non significatives ont toutes les deux pour objet des enfants qui jouent aux gendarmes et aux voleurs. Il semble donc légitime de se demander, dans ce cas, si la nature des objets en jeu atténue ou non l'effet possible lié aux modèles combinatoires implicites. En contre partie, les deux situations d'association, qui portent bien sur des objets différents (des personnes qui se saluent et des points reliés par des segments), ne se distinguent pas significativement au niveau des performances. Il semble donc possible que la nature du modèle

---

<sup>15</sup> Certains élèves ont bien justifié leur réponse comme il leur a été demandé. Mais ces quelques écritures ne sont pas assez nombreuses pour permettre une étude systématique des significations.

combinatoire implicite l'emporte, ici, sur un éventuel effet lié à la nature des objets en jeu. Enfin, seule la situation de distribution présente une structure ordonnée selon la position des cases sur la feuille. Il est donc nécessaire d'éclairer ces points puisqu'il n'a pas été possible de tester de façon indépendante ces deux modalités du facteur sémantique, la nature des configurations et celle des collections.

Ces deux orientations font donc l'objet d'une expérience complémentaire qui cherche non plus à vérifier l'idée selon laquelle les caractéristiques sémantiques des situations favoriseraient ou non telle ou telle procédure mais à rendre compte de ce phénomène.

### **C. Description de l'épreuve**

Une deuxième expérience appelée « Atelier de résolution de problème » a donc été menée pour dépasser le simple constat issu de l'épreuve « Devoir sur table ». Elle cherche à appréhender cet effet sémantique au cours même de l'élaboration des solutions. D'une certaine façon, nous pensons qu'il est possible de transférer les conclusions de cette nouvelle expérience à la première, afin répondre aux questions qu'elle a soulevées.

Cette épreuve complémentaire porte sur un nouvel échantillon d'élèves de 4<sup>ème</sup> et ces élèves ont travaillé sur les problèmes de l'épreuve « Devoir sur table », uniquement sur l'énoncé  $n=20$ . Cette nouvelle épreuve met en œuvre un dispositif spécifique afin qu'il soit possible d'observer à la fois les questions qu'ils peuvent se poser sur la situation, les interprétations qu'ils produisent de l'énoncé du problème, les justifications aux réponses qu'ils proposent, etc. Ainsi, nous pensons avoir accès aux significations spécifiques que ces élèves produisent à partir de l'énoncé du problème et qui accompagnent / déterminent les procédures mises en œuvre pour résoudre ce dernier.

Par groupes de trois et isolés du reste de la classe, les élèves travaillent conjointement sur un des cinq problèmes  $n=20$  (qu'ils ne choisissent pas). Ils disposent à volonté de feuilles A3 pour leurs recherches, mais d'un seul marqueur pour le groupe. Enfin, pour orienter leur activité vers un résultat commun, ils remplissent à la fin de leur travail une unique feuille de réponse (justifiée) qui les engage tous les trois.

Les élèves sont donc placés dans un milieu organisé de telle sorte qu'ils doivent prendre en charge l'élaboration de la réponse de façon collective (ils doivent chercher ensemble la réponse au problème), autonome (avec leurs propres ressources et sans recours possible à l'arbitrage d'un expert) et consensuelle (s'entendre sur la solution à rendre, ce qui implique des échanges argumentés).

Les séances ont été filmées pour constituer un corpus d'échanges verbaux et d'écritures de recherches relatives aux différentes situations travaillées. Quatre à six groupes de trois élèves ont donc été ainsi enregistrés pour chacun des cinq problèmes – ce qui a permis de recueillir le travail de quelques soixante-quinze élèves.

## **2. Approche théorique et définition d'une méthodologie pour l'analyse des contenus**

Cette situation expérimentale devrait donc induire un certain nombre d'explicitations de la part des élèves, explicitation susceptibles d'éclairer le travail d'élaboration de la réponse. Le problème qui se pose alors concerne la manière d'analyser le corpus constitué par les interactions entre les élèves au cours de la résolution. L'observation des propos échangés au cours de ce travail collectif permet le recueil d'un certain nombre d'indices pour répondre aux questions présentées ci-dessus. Nous supposons ainsi que le contenu de ces échanges participe de façon effective à l'émergence de la solution. Cette idée semble légitime puisque les propos échangés sur le problème et sa résolution sont bien souvent générateurs à la fois de débats entre les élèves (débats qui cherchent à établir un consensus sur la réponse à rendre) et d'évolutions visibles des réponses proposées. Cette approche interactionniste renvoie donc à la notion de conflit cognitif qui prend en charge les processus en jeu quand des sujets échangent sur les significations, les buts et les moyens au cours d'une tâche qu'ils partagent.

Deux remarques s'imposent concernant cette notion. Bien qu'issue des travaux d'inspiration structuraliste sur les effets de la variable sociale dans la construction de la pensée logique (cf. Perret-Clermont, 1976, 1979 ; Doise et Mugny 1981, Mugny, 1985), elle est reprise dans notre étude à la fois dans un sens plus fonctionnaliste et moins centrée sur l'individu.

D'une part, comme nous cherchons à rendre compte des relations entre les significations élaborées par les élèves pour résoudre les problèmes et les réponses qu'ils produisent, nous nous focalisons sur les procédures, les écritures et les justifications visibles dans un contexte d'interactions sociales. Ces observables sont pris comme des indices importants pour appréhender les processus en jeu comme nous l'avons présenté en introduction.

D'autre part, au contraire de l'approche de Doise et Mugny (ibid.) centrée sur l'individu, nous nous sentons plus près, pour cette deuxième expérience, d'approches comme celles de la cognition partagée avec des auteurs comme Roschelle et Teasley (1995) pour lesquels, l'environnement social et l'environnement matériel participent conjointement à l'activité et au progrès cognitif et qu'il est difficile d'isoler le cognitif du social tant leurs relations sont complexes. Ainsi, nous ne nous focalisons pas essentiellement sur l'activité de chaque élève pris indépendamment dans le groupe pour étudier ce qui la détermine ; nous ne la prenons en compte qu'en tant qu'élément d'une construction commune de la réponse. De cette façon, nous pouvons proposer des modèles de résolutions qui prennent en charge le contenu de toutes les interactions entre les élèves du groupe. Cette position méthodologique renvoie à la question de l'analyse du contenu des échanges et, donc, à la définition d'une grille d'observation qui permettent de rassembler un certain nombre d'informations sur la façon dont les groupes d'élèves ont élaboré leur réponses et comment sont intervenues les caractéristiques des contextes sémantiques définissant les différents problèmes posés.

Les enregistrements des différents groupes d'élèves ayant participé à l'épreuve « Atelier » sont analysés en s'inspirant du modèle des processus de négociation conversationnelle ce qui renvoie aux travaux d'auteurs comme Trognon (1993) et Brixhe (1999). Nous considérons avec ces auteurs que les moments de débat entre les élèves dans un contexte collaboratif (la résolution collective du problème) sont des moments de négociation (au sens général impliquant l'idée de débat, de controverse, de tractation, de discussion, etc.). Les processus interactifs alors en jeu portent essentiellement sur les significations de la situation à traiter (ses propriétés), sur les procédures de traitement correspondant, mais aussi sur le but de l'activité et, éventuellement, sur les significations du code en jeu dans les registres sémiotiques, langagiers et arithmétiques qui médiatisent la résolution du problème.



Précisons à ce sujet que nous ne limitons pas le fonctionnement des échanges aux seuls processus sémantique de codage – décodage. Et certains dysfonctionnements ne relèvent pas forcément de ces derniers et du niveau de connaissance du code. Il faut prendre en compte le fonctionnement de l'implicite dans la communication, dimension qu'on ne saurait ignorer et qui implique des processus d'inférence. Nous intégrons ainsi un modèle inférentiel et pragmatique qui se réfère aux travaux de Wilson et Sperber (2002) : les significations des messages se comprennent en contexte, par des inférences à partir d'énoncés « allégés » compte tenu de ce que le locuteur pense savoir de son interlocuteur et du contexte d'énonciation. Ce modèle inférentiel permet de rendre compte de certains dysfonctionnements liés au traitement de l'implicite au cours des négociations portant sur les différents niveaux de signification en jeu.

Notre projet, rappelons-le, est de mettre en évidence des modèles de résolution liés aux problèmes de dénombrement de combinaisons dont les contextes sémantiques sont caractérisés par les différents modèles combinatoires implicites. Ces modèles de résolution mettent en relation les caractéristiques mathématiques et sémantiques des énoncés des problèmes avec les significations que les élèves produisent pour interpréter ces énoncés. D'une part, ces processus de résolution sont de nature représentationnelle et engage donc des registres sémiotiques et langagiers dont il faut tenir compte (cf. sous I.3.C, p. 20). D'autre part, l'élaboration des significations est collective et engage donc des négociations entre les élèves du groupe. A partir du moment où nous cherchons à observer la façon dont les élèves interprètent la situation pour résoudre chacun de nos problèmes, il est nécessaire de centrer notre observation sur les assertions produites au cours de la négociation pour justifier les procédures qu'ils proposent ou les objections qu'ils posent dans les moments de conflit socio-cognitifs.

L'analyse de contenu que cette observation engage fait appel à l'analyse illocutoire<sup>16</sup> qui intègre d'une certaine façon la théorie des actes de langage décrite par Ar-mengaud, (1985) et Austin (1962), les logiques illocutoires et intensionnelles de Searle

---

<sup>16</sup> L'analyse illocutoire est développée au sein du Laboratoire de Psychologie de l'Interaction-Groupe de Recherche sur les Communications de l'université Nancy 2. Ce modèle permet de rendre compte des phénomènes langagiers interactifs envisagé comme processus qui génère des significations. Un certain nombre de travaux y font référence comme ceux de Trognon, 1991 ; Trognon et Brassac, 1992 ; Ghiglione et Trognon, 1993 ; Trognon et Grusenmeyer, 1994.

et Vanderveken (1985) et Vanderveken (1988) et les fondement de l'Analyse Conversationnelle développée par les éthnométhodologistes comme Garfinkel (1967).

Dans la mesure où notre analyse ne fait que s'inspirer de ces outils théoriques, nous n'en présentons à présent que certains éléments qui nous ont paru pertinents pour notre travail (essentiellement les notions d'acte de discours et d'échange). Il est bien évident que nous adaptons ces notions théoriques à notre problématique et nous définissons ainsi des outils méthodologiques sur lesquels nous nous appuyons pour organiser une analyse satisfaisante de nos protocoles compte tenu de notre projet.

### **A. De l'acte discursif à la conduite interactive**

Notre méthodologie s'équipe d'abord de la notion d'acte discursif (ou actes illocutoires élémentaires) et l'accommode en terme de « conduite interactive » comme nous l'expliquons plus bas.

Très généralement, l'acte discursif se définit comme une conduite de nature langagière réalisée au cours des interactions par les partenaires d'une collaboration (résoudre le problème). Ces conduites se caractérisent à la fois par une dimension pragmatique (la force illocutoire) qui renvoie à sa fonction relationnelle (de nature déclarative, assertive, performative, impérative ou directive, interrogative, optative et expressive ou exclamative) et une dimension sémantique, le contenu propositionnel (défini par un référent et un prédicat et représentant l'état des choses que l'on évoque) sur lequel s'applique cette fonction. Nous en tirons donc une première conséquence méthodologique : au cours des interactions collaboratives, il y a changement d'acte chaque fois que son contenu et ou sa fonction change. Ce qui revient à dire que chaque acte illocutoire est analysé, d'une part, du point de vue de la gestion des aspects relationnels et actionnels (les conduites langagières) et, d'autre part, du point de vue des aspects cognitifs représentationnels.

Une lecture rapide de nos protocoles montre que la communication entre les élèves ne se limite pas aux seuls actes de nature langagière. Ils produisent aussi différents types de figure pour représenter l'état des choses évoquées et, plus particulièrement, les propriétés de la situation traitée. Ainsi, pour appréhender, pour expliquer, pour énumérer les combinaisons possibles, certains élèves produisent des schémas. Il n'est pas habi-

tuel dans les courants de recherche qui ont recours à ce modèle d'analyse conversationnel d'intégrer du non langagier comme acte de discours.

Voici un extrait du protocole 01 (association – salutations ; répliques 136 à 146)<sup>17</sup> qui illustre cette nécessité d'élargir la notion d'acte discursif dans le cadre de notre travail : Cédric essaie d'expliquer à Lucile pourquoi chacun des 20 randonneurs ne va saluer que 19 autres personnes du groupe. Lucile fortement convaincue que la solution est une partition des 20 randonneurs en groupes de 2 n'intègre pas le sens de cette nouvelle donnée (le « 19 ») qui n'est pas marqué dans l'énoncé. A bout d'argument, Cédric fait un schéma.

136. Cédric : Regarde, il y a 20 personnes. Je t'en dessine 20. *Cédric prend le feutre et commence à dessiner des cercles en deux rangées de dix pour représenter les vingt personnes.*

137. Yaëlle : Non, attends, Cédric...

138. Lucile : Non, mais arrête !

139. Cédric : Non, elle ne comprend pas. Elle comprends pas... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20... Voilà. Imaginons cette personne. *Cédric fixe, en le repassant, le cercle en haut et à droite de la double rangée.* Elle va serre la main à 1, 2 ... *A partir de ce cercle, il trace des courbes qui le relient au autre sur la rangée du haut (du plus proche à côté au plus loin à gauche) Puis, pour la rangée du bas, du plus proche (en dessous) au plus loin (à droite sur la rangée du bas)...* 18, 19 et t'as vu, là il a serré la main à 19 personnes. Juste ce mec là.



[...]

<sup>17</sup> Rappelons l'énoncé du problème : Quand 2 personnes d'un groupe de randonneurs se retrouvent, elles se saluent en se serrant la main droite. Ce dimanche matin, 20 personnes du groupe se retrouvent. Combien de saluts sont échangés en tout entre ces 20 personnes ?

144. Yaëlle : Et après, chaque personne va faire la même chose. Donc, c'est pour ça que tu multiplies par vingt.

145. Cédric : Mais c'est ça, c'est tout.

146. Lucile : Mais j'ai compris, mais je ne suis pas d'accord.

Il est difficile de ne pas considérer ce schéma comme un acte ayant à la fois une force illocutoire (une fonction assertive puisqu'il s'inscrit dans l'interaction en tant que vérité à faire reconnaître sur les propriétés de la situation) et un contenu qui évoque l'état de la situation traitée et que l'on peut généraliser de cette façon : *< Chacun des  $n$  objets peut définir un appariement<sup>18</sup> possible avec les  $n-1$  autres >*. Cette explication sous forme de figure caractérise un raisonnement de niveau empirique<sup>19</sup>. Elle se met en place pour relayer des assertions langagières trop abstraites pour que Lucile puisse en intégrer le contenu propositionnel (la réplique 146 montre d'ailleurs que, dans ce cas, même l'ostension de la figure ne suffit pas à assurer cette intégration).

Par conséquent, il serait trop réducteur dans le cadre de notre épreuve de limiter notre analyse aux seuls actes de discours relevant du domaine du langage naturel. Nous utilisons donc le terme « de conduite interactive » pour rendre compte de toutes les formes de communication collaborative présentes dans notre corpus quelque en soit le registre sémiotique. Ainsi, nous parlons de « conduite interactive » chaque fois qu'un acte de communication présente, d'une part, une fonction interactive dans le cadre de la collaboration entre élèves pour résoudre le problème, d'autre part, un contenu qui évoque les propriétés de la situation, enfin, une médiatisation dans un registre langagier, graphique (schéma, tableau ou figure) ou arithmétique. Nous utilisons le terme de registre dans le sens de Duval (1995) pour signifier un système sémiotique permettant à la fois de représenter et de traiter une situation. Un acte de discours qui se situe dans un contexte collaboratif de négociation de sens est donc un cas particulier de conduite interactive : il est médiatisé par le langage naturel. Il est évident que dans nos protocoles, la majorité des conduites interactives sont des actes de discours.

<sup>18</sup> Un appariement définit un ensemble de 2 éléments (une paire). Le terme peut donc s'appliquer aux combinaisons de 2 éléments pris parmi  $n$ . En énumérant les combinaisons de 2 éléments pris parmi  $n$ , les élèves constituent donc des appariements avec les  $n$  objets de la collection.

<sup>19</sup> Cf. Margolinas (1993, pp. 23-27) et ci-dessus, sous III.4.A, p. 100.

S'il est important de distinguer les « conduites interactives » (quelqu'en soit la forme) dans notre contexte collaboratif, c'est qu'elles constituent les éléments des séquences particulières de négociations que l'on désigne en terme « d'échanges » (et plus précisément, ce que nous appelons « les échanges résolutifs » comme nous le verrons ci-dessous). Cette notion d'échanges avec celle de conduites interactives constituent nos outils méthodologiques pour analyser les protocoles recueillis.

## **B. Les découpages séquentiels du corpus**

### **a. Les problèmes d'homogénéité de séquences**

Faisons abstraction d'un premier découpage possible des protocoles, celui qui est lié à l'organisation même de l'épreuve (une phase de recherche et une phase de rédaction de la solution). Les séquences produites par ce découpage, très larges, sont définies selon que l'objet de la discussion porte sur la solution à trouver ou sur la justification à rédiger pour conclure le travail demandé par l'expérimentation. Ce découpage n'est guère adapté aux questions que nous nous posons relativement aux liens entre les contextes sémantiques, les procédures et les significations.

Une deuxième possibilité de découpage semble plus proche de nos préoccupations : il s'agit d'un découpage thématique autour des différentes procédures qui émergent au fur et à mesure de la négociation. La séquence change lorsque la procédure dont il est question dans l'interaction change. Ce découpage permet de repérer des moments importants de la négociation puisqu'il localise des échanges centrés sur des procédures particulières et devraient donc contenir les significations qui s'y associent puisque les procédures n'apparaissent pas *ex nihilo*.

Cependant, une première analyse thématique montre qu'il est difficile de délimiter clairement ce type de séquence : s'il est relativement aisé de repérer l'explicitation d'une procédure, il n'est pas évident d'y associer telle ou telle « conduite interactive ». Le déroulement linéaire des interactions ne suit pas forcément le déroulement des négociations puisque des ruptures, des résurgences et des régressions viennent perturber le cours de ces interactions, produisant des phénomènes d'enchâssement ou de croisement. Pour dire les choses autrement, il s'agit de pouvoir justifier au sein d'une séquence le lien (causal ou corrélatif) entre les assertions portant sur les significations données à la

situation et la procédure proposée. Ce problème, que l'on caractérise en terme « d'homogénéité des séquences », converge donc avec le problème de la délimitation de ces séquences.

Dans les deux cas, la proximité de l'assertion et de la procédure et l'intuition (ou le « bon sens ») de l'observateur sont des arguments peu satisfaisants. Ces repères peuvent donner quelques indications et produire même des découpages séquentiels justes mais ils ne les justifient absolument pas.

### **b. « L'échange » comme séquence circonscrite et homogène**

En se référant à la logique illocutoire et intentionnelle décrite par Searle et Vanderveken (ibid.), un découpage possible de notre corpus est celui qui permet de circonscrire des séquences satisfaisant aux propriétés de réussite et de satisfaction des actes de discours. Le déroulement d'une négociation dépend surtout de la façon dont les actes discursifs échangés remplissent ou non les propriétés de réussite et de satisfaction. Dans cette perspective, la négociation introduit des processus de régulation dans les interactions pour tendre vers l'accomplissement de ces dernières.

Pour rendre compte de l'importance dans notre travail de ces propriétés de réussite et de satisfaction qui régissent naturellement les interactions, nous allons dans un premier temps les expliquer d'une façon générale, puis nous les illustrerons à partir d'un nouvel extrait de nos protocoles.

D'une façon générale, les conditions de réussite et de satisfaction sont déterminées par les composantes de la force illocutoire<sup>20</sup>. A partir du moment où notre problématique ne porte pas sur la communication dans un contexte collaboratif mais sur les effets des propriétés mathématiques et sémantiques de nos problèmes sur la négociation des significations, il est inutile d'entrer dans de tels détails et nous n'en retiendrons opportunément que la composante « but » qui nous paraît essentielle.

Dans cette théorie, un locuteur est considéré comme ayant l'intention d'atteindre un but illocutoire quand il relie un contenu propositionnel à une partie du monde. Il y a

---

<sup>20</sup> La notion de force illocutoire est présentée sous IV.2.A, p. 151. Ses composantes sont : le but illocutoire, le mode d'atteinte de ce but, les conditions du contenu propositionnel, les conditions préparatoires, les conditions de sincérité et le degré de puissance de ces dernières.

cinq buts illocutoires de nature différente selon l'intention qui les détermine : assertive, engageant, directif, déclaratif et expressif. Un but est assertif quand il formule une proposition concernant une des propriétés du référent (assertions, rappels, démentis, accusation, témoignages, informations, prédiction). Il est engageant quand il formule une proposition qui l'engage à accomplir une action (promesses, menaces, souscriptions, renonciations, acceptation, vœux, serments). Il est de nature directive quand il formule une proposition qui demande à l'interlocuteur d'accomplir une action (questions, prières, sollicitations, ordres, conseils, revendications, recommandations). Un but est déclaratif, quand il formule une proposition qui accomplit l'action qu'elle contient (appellations, définitions, congédiements, ratifications, legs, ajournements, bénédictions, condamnations). Enfin, un but est expressif, quand il formule une proposition qui manifeste l'état mental que leur inspire l'état de la chose représentée (excuses, remerciements, vantardises, félicitations, récrimination, louanges).

Plus particulièrement, dans notre expérience, au cours d'une interaction dont l'objet sera de s'accorder sur l'interprétation d'un des problèmes, un acte de discours à fonction assertive est réalisé par l'élève qui initialise la séquence en exposant sa conception de la situation à traiter. Cet acte de discours sera réussi s'il est pris selon sa fonction interactive (sa force illocutoire) : les autres élèves du groupe reconnaissent ainsi que l'intention de celui qui parle est de leur faire admettre la vérité de son assertion. Et c'est cette reconnaissance qui les inscrit dans une collaboration en tant qu'interlocuteurs potentiels ou réels (s'ils acceptent de participer à la tâche donnée).

D'autre part, cet acte de discours sera satisfait si un des élèves reconnaît la valeur de vérité de cette assertion : il s'approprie du contenu propositionnel et le montre en l'intégrant dans son action (il change sa procédure, par exemple). Ainsi, une assertion est satisfaite quand on en utilise le contenu pour agir, comme une promesse est satisfaite quand elle est tenue, un conseil quand il est suivi, une demande quand elle est accordée, une offre acceptée, une question quand on y répond, etc. Il y a satisfaction parce qu'à chaque fois le but illocutoire est atteint (d'où l'intérêt pour nous de cette composante de la fonction illocutoire de l'acte de discours).

Voici, pour illustrer l'explication précédente, un autre extrait du protocole 01 (association – salutations ; répliques 12 à 16). Une première réponse retenue par le

groupe est la procédure partitive (20/2) qui correspond à une énumération partitive (les 20 objets sont associés en 10 groupes de 2). Voici la suite des interactions.

12. Yaëlle : (a) Non ce n'est pas ça (b) parce que chaque personne serre la main à chaque personne.
13. Lucile : Deux personnes...
14. Yaëlle : (a) Il n'y a pas une personne qui serre la main à une personne. (b) Il y a vingt personnes qui serrent la main à vingt personnes.
15. Cédric : Ben ça fait 20x20.
16. Yaëlle : Oui, voilà.

L'assertion de Yaëlle dans les actes 12a, 12b, 14a et 14b présente aux autres les contenus propositionnels suivants :

- < *Ce n'est pas 20/2* > (12a), < *parce que chaque objet de la collection peut constituer une combinaison de 2 objets avec chacun des n autres.* > (12b)
- < *Il n'y a pas un objet constituant une combinaison de 2 objets avec un des n autres* > (14a), < *mais n objets constituant des combinaisons possibles de 2 objets avec n objets.* > (14b)

Dans la dénégation 12a (« *Non ce n'est pas ça* »), Yaëlle conteste la réponse initialement élaborée par le groupe. Elle complète son objection par un acte assertif qui présente une signification nouvelle de la situation (12b : « *parce que chaque personne serre la main à chaque personne* »). Elle renforce cette nouvelle signification par la dénégation assertive 14a (« *Il n'y a pas une personne qui serre la main à une personne.* ») complétée par l'assertion 14b (« *n objets constituant des combinaisons possibles de 2 objets avec n objets* ») qui renvoie à 12b.

Cette assertion est réussie puisque Cédric reconnaît-là une contradiction à leur première réponse. Elle est satisfaite dans la mesure où Cédric produit une procédure qui tient compte de la nouvelle signification de la situation (20x20 remplace 20/2). Cette satisfaction est attestée par l'approbation de la dernière réplique (16) de Yaëlle qui valide la réponse de Cédric comme conforme à sa définition de la situation : « *Oui, voilà.* »



Une séquence comme celle que nous venons de présenter, close par la satisfaction d'une assertion, semble être la plus petite interaction possible. L'unité de base de notre découpage est ainsi l'échange<sup>21</sup> défini comme une séquence plus ou moins longue de conduites interactives, close quand l'acte qui l'a initié est satisfait<sup>22</sup>. L'intérêt des critères de réussite et de satisfaction tient au fait qu'il devient possible de définir des séquences circonscrites autour d'enjeux particuliers caractérisés d'une façon générale par le but de la collaboration (résoudre le problème) et de façon plus locale par un sous but particulier de nature illocutoire.

### c. Notion « d'échanges résolutaires »

Dans un contexte collaboratif comme celui d'une résolution collective de problème, nous avons vu (cf. sous IV.2, p. 148) que l'activité de négociation peut porter sur l'interprétation du contenu de l'énoncé, les procédures, le but ou la signification des codes. Par conséquent, un découpage du corpus en terme d'échanges semble convenir puisqu'il permet d'isoler des séquences interactives closes sur ces points possibles de débat. Mais une question demeure concernant sa pertinence compte tenu de notre objectif : quels sont les échanges sur lesquels concentrer notre attention parce que susceptibles de mettre à jour le processus de modélisation tel que nous l'avons décrit ci-dessus, page 148. A ce sujet, il nous paraît intéressant de noter une différence entre l'acte de discours qui initialise l'échange précédent (les répliques 12 et 14 dans notre exemple) et ceux qui le closent (15 et 16). Cette différence peut être analysée selon ce que Vanderveken (1988) nomme la direction d'ajustement. Voici ce qu'il dit à propos des actes illocutoires élémentaires (les actes de discours) :

*Lors de leur accomplissement, le locuteur relie le contenu propositionnel au monde avec l'intention d'établir une certaine correspondance entre les mots et les choses selon la direction d'ajustement déterminée par la force. D'une part, un locuteur qui*

<sup>21</sup> Cette notion est inspirée de Roulet et al. (1985).

<sup>22</sup> Satisfait mais aussi abandonnée ou suspendue, etc. Notons que la réplique 146 du premier extrait clôt aussi l'échange commencé avec la production du schéma (répliques 136 et 139) mais ne le satisfait pas puisque Lucile n'intègre pas dans sa modélisation de la situation les assertions dont les contenus sont : < Chacun des  $n$  objets est apparié aux  $n-1$  autres > (136 et 139) ; < cette assertion est valable pour les  $n$  objets > et l'acte directif suivant < donc on multiplie  $n-1$  par  $n$  >. Elle refuse de remplacer la procédure partitive 20/2 par la procédure de type 19x20 tout en comprenant pourtant, en apparence, le contenu propositionnel : « Mais j'ai compris, mais je ne suis pas d'accord. » (146).

*fait une assertion, prédiction témoignage ou conjecture entend représenter comment les choses sont dans le monde. La direction d'ajustement de pareilles énonciations assertives est celle des mots aux choses. D'autre part, un locuteur qui fait une promesse, acceptation, demande ou recommandation entend que le monde soit transformé par une action future (la sienne ou celle de l'interlocuteur) pour qu'il corresponde au contenu propositionnel. La direction d'ajustement des énonciations engageantes ou directives est celle des choses aux mots.*

Voici comment nous pouvons appliquer à notre travail cette idée de direction d'ajustement. Les actes discursifs 12 et 14 donnent une représentation des propriétés de la situation. La direction d'ajustement n'est donc pas la même que celle des actes 15 et 16 qui appellent à une transformation des choses du monde (le traitement de la situation, l'opération qui résout le problème). L'analyse de nos protocoles montre une tendance importante de la part des élèves à produire, au cours de la négociation, des échanges intégrant les deux directions d'ajustement. Nous pouvons observer, d'une part, des actes à but assertif concernant la représentation du problème (en définir des propriétés spécifiques pour lui attribuer une signification partagée), d'autre part, en conclusion, des actes à but directif ou engageant qui proposent une procédure et dont il y a de bonnes raisons de penser qu'elle est inférée à partir de ces significations (du fait du caractère homogène de l'échange). Nommons « échange résolutoire » ce type de séquence interactive dont on peut résumer la forme (quelque peu « syllogistique ») de la manière suivante : « assertions relatives aux propriétés de la situation / conclusion d'une procédure de traitement ».

Cette définition de « l'échange résolutoire », avec ses caractéristiques d'homogénéité liées aux conditions de réussite et de satisfaction des actes qui le constituent, présente donc des conséquences méthodologiques intéressantes. Nous pouvons établir une relation corrélatrice (ou éventuellement causale) entre l'inférence d'une procédure par un élève, comme celle qui relève de la solution de Cédric (20x20), et une définition particulière de la situation, comme celle de Yaëlle liée à ces contenus propositionnels : *< chaque objet peut s'apparier avec chacun des n autres >* et *< il y a n objets appariés avec n objets >*. Découper les protocoles en séquences homogènes que sont les échanges résolutoires et en recenser la composition en terme d'actes constitués d'une fonction interactive (une force illocutoire) et d'un contenu nous permet, dans les

cas d'échanges collaboratifs, d'associer de façon valide des énoncés relatifs aux propriétés de la situation et au but à atteindre avec des procédures de traitement de cette situation.

#### **d. Des séquences dynamiques et fonctionnelles**

Il serait naïf de penser que l'essentiel des échanges au cours de la négociation des significations sont strictement résolutoires (tels que nous venons de le définir) ou, plus précisément, que seuls ces échanges participent à l'élaboration de la solution. Et s'en tenir à ce type de séquence risquerait d'appauvrir notre analyse des protocoles. Il nous a donc paru nécessaire de compléter notre analyse des protocoles par un découpage fonctionnel organisé selon le type de co-élaboration auxquelles participent les élèves du groupe. Il en existe quatre<sup>23</sup> :

- la collaboration acquiesçante,
- la co-construction,
- la contradiction non argumentée,
- le conflit socio-cognitif.

Ces découpages fonctionnels présentent un intérêt pour notre recherche en introduisant une dynamique dans l'observation. Le bénéfice de ces interactions semblent liés, selon les auteurs de cette classification à deux fonctions essentielles dans l'élaboration collective de la réponse : le contrôle de l'action et la déstabilisation des significations. Voici quelques éclaircissements.

##### **• *Collaboration acquiesçante, co-construction***

Dans une collaboration acquiesçante, les interventions de l'un ont une valeur de contrôle et de renforcement de l'activité de l'autre dont il reconnaît le bien-fondé. Une co-construction présente une succession alternée des interactions, sur un fond d'accord à propos des significations en jeu. Revenons sur le premier extrait du protocole 01 (cf. page 152) pour illustrer cette notion de co-construction.

---

<sup>23</sup> Les notions évoquées dans cette partie se réfèrent aux travaux de Gilly, Fraisse et Roux, 1988.

La réplique 144 de Yaëlle (« *Et après, chaque personne va faire la même chose. Donc, c'est pour ça que tu multiplies par vingt.* ») peut se découper en deux propositions : < *Cette règle est valable pour chacun des  $n$  objets* > (144a) et < *Donc, on multiplie par  $n$ .* > (144b). La première proposition complète le raisonnement de Cédric dont voici le contenu < *Un objet est apparié aux  $n-1$  autres* > (répliques 136 et 139) La seconde conclue le raisonnement par l'inférence d'une procédure. De toute évidence, Cédric et Yaëlle ont élaboré les mêmes significations sur la situation. A partir du moment où ils partagent une interprétation identique de l'énoncé, ils ne peuvent qu'alterner les interactions de façon convergente vers la même conclusion. Nous retrouvons avec cet exemple un cas de co-construction présentant un schéma homogène d'échange résolutif 'assertion / conclusion' identique à celui de l'échange 12 à 16 de l'extrait précédent (cf. page 157).

En collaboration acquiescante comme en co-construction, le contrôle social de la réalisation de la procédure, sous forme d'acquiescements, de reformulations, de relais de l'action présentent une fonction régulatrice : il favorise la gestion consciente du déroulement de l'activité et contribue, comme nous venons de le voir dans l'extrait du protocole 01, à la coordination des actes particuliers en séquence procédurale retenue comme réponse.

Voici un extrait du protocole 04 (association – salutations, répliques 06 à 19) qui montre que collaboration acquiescante et co-élaboration sont bien souvent inséparables dans une élaboration commune de la solution.

6. Mathilde : Quand ils disent : « Il faut une équipe de deux gendarmes... », ça veut dire qu'ils séparent les vingt élèves en deux ?
7. Robine : Chais pas.
8. Mathilde : Ou, sinon...
9. Robine : Ils sont deux par équipe.
10. Mathilde : Oui, voilà.
11. Nicolas : « ... une équipe de deux gendarmes... », ils sont deux dans l'équipe.
12. Mathilde : Ils font une équipe de deux.

13. Robine : Oui.

14. Mathilde : Oui.

15. Robine : Oui, donc...

*Robine entoure deux groupes de deux ronds sur une double ligne de 10 ronds représentant les 20 enfants.*

16. Mathilde : On va faire un trait. Comme ça... Tu fais des gros ronds autour des petits ronds !

*Mathilde sépare les groupes par des traits.*



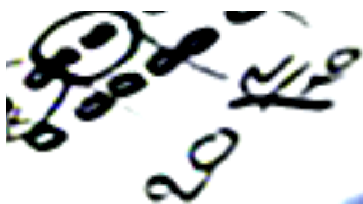
17. Robine : Vingt enfants...

18. Mathilde : Vingt enfants...

*Mathilde fait une ligne avec son doigt autour des vingt ronds.*

19. Robine : Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept... Normalement, c'est dix parce que c'est vingt divisé par deux. Ça fait dix.

*Robine compte rapidement les groupes faits en les pointant du feutre. Puis, elle pose et effectue l'opération.*



Nous avons « interprété » ci-dessous cet extrait. La colonne de gauche correspond au contenu propositionnel des actes discursifs. La colonne de droite correspond à l'aspect relationnel et intentionnel de ces derniers. Les contenus des assertions sont exprimés en termes généraux d'objets et d'appariements<sup>24</sup>. Les répliques sont repérées par les numéros entre parenthèses. Les conduites interactives sont en italique et, parmi elles,

<sup>24</sup> Cf. note 18, p. 153.

les actes discursifs sont entre crochets et la réalisation des procédures est mise en gras. Nous avons souligné les marques d'approbation qui correspondent dans cet extrait à des collaborations acquiesçantes renforçant les assertions.

<u>Mathilde</u> : < <i>Est-ce que l'énoncé « Il faut une équipe de 2 gendarmes. » (6a) signifie qu'il faut séparer le groupe de joueurs en 2 ?</i> > (6b)	Questionnement sur la signification d'une « partie » dans l'énoncé du problème. (6a) Proposition de signification. (6b)
<u>Robine</u> : < <i>Cela signifie qu'ils sont 2 par équipe.</i> > (9)	Réponse à 6 : définition d'une propriété de la situation. (9)
<u>Mathilde</u> : < <i>Oui.</i> > (10)	Acceptation de la signification donnée en 9. (10)
<u>Nicolas</u> : < <i>Ils sont 2 par équipe.</i> > (11)	Renforcement de la signification donnée en 9. (11)
<u>Mathilde</u> : < <i>Ils font une équipe de 2 enfants.</i> > (12)	Renforcement de la signification donnée en 9 et 11. (12)
<u>Robine</u> : < <i>Oui.</i> > (13)	Acceptation de la signification donnée en 12. (13)
<u>Mathilde</u> : < <i>Oui.</i> > (14)	Acceptation de la signification donnée en 12. (14)
<u>Robine</u> : < <i>Donc...</i> > (15a)  <i>Robine énumère des groupes de 2 objets en les encerclant sur une double ligne de 10 points représentant les 20 enfants.</i> (15b)	Conclusion de 9 à 14. (15)
<i>Mathilde continue son énumération par des traits qui séparent les objets de la collection par 2.</i> (16)	Conclusion de 9 à 14. (16)
<u>Robine</u> : < <i>20 objets</i> > (17)	

<p><u>Mathilde</u> : &lt; 20 objets &gt; (18a)</p> <p><i>Mathilde fait une ligne avec son doigt autour des vingt objets schématisés. (18b)</i></p>	
<p><u>Robine</u> : &lt; Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept... Normalement, c'est dix parce que <b>c'est vingt divisé par deux</b>. Ça fait dix. &gt; (19a)</p> <p><i>Robine compte rapidement les groupes faits en les pointant du feutre. <b>Puis, elle pose et effectue l'opération.</b> (19b)</i></p>	Développement de la conclusion 16. (19)

Cette séquence est composée de deux échanges. Le premier (6 – 14) a pour but de s'accorder sur le sens de cette phrase de l'énoncé : « *Il faut une équipe de deux gendarmes...* ». Il est donc initialisée à la réplique 6 qui interroge sur la signification du terme « équipe » dans l'énoncé. Cet acte est satisfait à la réplique 14 par un consensus du groupe d'élèves concernant le sens à donner à cette notion et que l'on peut résumer par ce contenu propositionnel : < *1 appariement, c'est 2 objets de la collection.* >

Le second échange, initialisé et articulé au premier à partir de la réplique 15 « *Donc...* », se conclue / est satisfait par la mise en œuvre d'une série d'activités résolutives : une énumération partitive produite de concert entre Mathilde et Robine (16), (18a) et (19a) complétée par l'opération 20/2 (19b).

Le caractère homogène de la séquence (deux échanges réussis et satisfaits, articulés par la locution conclusive « donc » qui introduit une inférence) permet de penser que cette procédure est inférée à partir de la définition du terme « équipe » élaborée et partagée au premier échange.

Enfin, dans chacune des deux parties, il est possible d'observer une co-élaboration entre les élèves :

- Dans la partie à but assertif, la réplique 12 de Mathilde renforce et complète les répliques 09 (Robine) et 11 (Nicolas qui renforce cette dernière). « *Ils sont 2 par équipe.* » devient « *Ils font des équipes de 2.* »

- Dans la partie à but engageant et directif, Robine initialise une procédure (15) terminée par Mathilde (16). Puis, Robine donne le résultat de leur solution et renforce cette réponse en donnant une version moins empirique, plus rationnelle de cette dernière sous forme d'opération : 20/2. (19)

Les répliques 10, 13 et 14 sont de simples collaborations acquiesçantes enchâssées dans cette co-élaboration et dont l'effet est de renforcer la signification donnée à la situation *< 1 appariement, c'est 2 objets de la collection. >* en signifiant son approbation.

Nous avons donc bien affaire à une séquence résolutoire avec absence de conflit de signification, renforcements des contenus (actes discursifs des répliques 10, 13 et 14) et relais de l'action (conduites interactives<sup>25</sup> des répliques 15, 16, 19).

#### • *Conflit socio-cognitif et déstabilisation des représentations*

Les effets du conflit socio-cognitif sont connus : les représentations des élèves évoluent de façon plus rapide du fait de la déstabilisation des représentations et de la coordination des significations différentes portées sur la situation. Une condition s'impose pour que ces conflits de significations soient effectifs : les individus doivent être en mesure d'accepter les objections des autres, d'en assimiler le contenu et de l'intégrer dans l'organisation de leur réponse.

Un conflit socio-cognitif se caractérise par des confrontations contradictoires suivies de négociations sur les significations en jeu. Ces dernières peuvent porter soit sur la représentation initiale du problème et sur les procédures qui lui correspondent, soit sur le but à atteindre. Nous pensons que c'est la fonction de déstabilisation du conflit socio-cognitif qui induit des processus de négociation portant sur les significations : une dénégation justifiée par une assertion est réussie si elle induit le processus de négociation dans le groupe. Elle est satisfaite si l'échange s'achève par l'adoption de la

---

<sup>25</sup> Nous pouvons remarquer que l'acte discursif correspondant à la réplique 19 accompagne le transfert de la réponse d'un registre graphique à un registre arithmétique, ce qui correspond au passage de l'empirisme du factuel au rationalisme de la nécessité. L'utilisation de registres sémiotiques non langagiers (graphique pour le schéma et arithmétique pour l'opération 20/2) demande d'utiliser la notion de conduite langagière qui est plus générale que celle d'acte discursif.



procédure qui lui correspond. Voici, pour illustrer ces propos, un nouvel extrait du protocole 01 (association – salutations ; répliques 62 à 70) :

52. Lucile : On fait 20 fois 2 !

53. Cédric : Mais non !

54. Lucile : Mais non, c'est 20 personnes...

55. Yaëlle : Mais non, puisque elle comprise...

56. Lucile : Mais non. Il n'y a pas marqué : « Elle comprise. »

57. Cédric : Si, si. Elle va serrer la main à 19 personnes. Elle va serrer la main à 19 personnes. Une personne fait 19 mains et on multiplie 19 par 20.

58. Lucile : Je ne suis pas trop d'accord.

59. Yaëlle : Pourquoi ?

60. Cédric : On multiplie 19 par 20.

61. Lucile : Non, non, non. Ce n'est pas ça. Je suis sûre que ce n'est pas ça. Il n'y a pas forcément écrit ça. C'est un exemple. Il n'y a pas forcément écrit que ces personnes là faisaient parti. Il y a juste marqué 20 personnes. On ne se casse pas la tête, il y a 20 personnes c'est pas 19. Il y a juste écrit 20 personnes.

62. Cédric : Non t'as pas compris, si t'enlèves...

63. Yaëlle : On te dit qu'on prend 1 personne du groupe...

64. Cédric : On prend 1 personne du groupe...

65. Yaëlle : Si on prend 1 personne du groupe, elle va serre la main à 19 personnes...

66. Cédric : Elle va serrer la main à 19 personnes.

67. Yaëlle : Elle ne va pas serrer la main à elle-même.

68. Lucile : Et les autres ils ne se serrent pas les mains ?

69. Cédric : Mais si, mais justement, on multiplie par 20.

70. Lucile : D'accord, et ça fait combien ?

Nous avons simplifié ci-dessous cet extrait. La colonne de gauche correspond au contenu propositionnel des actes discursifs. La colonne de droite correspond à l'aspect relationnel et intentionnel de ces derniers ; le renvoie aux numéros des actes discursifs (exemple : « Justification à 53 (54) » signifie que l'acte assertif 53 est une justification à l'acte 53) correspond au caractère de réussite de ces derniers (nous verrons que la satisfaction de 54 se situe à 71). Les contenus propositionnels des assertions sont exprimés en termes généraux d'objets et d'appariements. Les deux parties opposées (d'une part Lucile et, d'autre part, Cédric et Yaëlle) sont distinguées par le fond alterné de la ligne (respectivement gris et blanc). Les répliques sont repérées par les numéros entre parenthèses. Nous avons mis en italique les énoncés à but assertif, en gras les énoncés procéduraux et souligné les marques d'opposition ou d'approbation qui assurent les différentes étapes de la négociation.

< <b>20x2</b> > (53)	Proposition de procédure. (53)
< <i>Il y a 20 objets...</i> > (55)	Justification inachevée de 53. (55)
< <u>Non.</u> > (54)	Opposition à 53. (54)
< <i>L'objet apparié est compris dans les 20.</i> > (56)	Justification de 54. (56)
< <u>Non.</u> > (57a)	Opposition à 54. (57a)
< <i>Ce n'est pas marqué dans l'énoncé.</i> > (57b)	Justification de 57a. (57b)
< <u>Si</u> > (58a)	Opposition à 57 et renforcement de 54. (58a)
< <i>1 objet est apparié à 19 objets</i> > (58b)	Justification [A] de 58a. (58b)
< <b>19x20</b> > (58c)	Proposition de procédure relative à 58b. (58c)
< <u>Non.</u> > (62a)	Opposition à 58. (62a)
< <i>Il y a juste marqué 20 objets dans</i>	Justification de 62a. (62b)

<i>l'énoncé et pas 19</i> > (62b)	
< <u>Non.</u> > (63)	Opposition à 62. (63)
< <i>Si on prend 1 objet du groupe, il sera apparié à 19 objets.</i> > (64 à 67)	Justification [A] à 63. (64 à 67)
< <i>1 objet n'est pas apparié avec lui-même.</i> > (68)	Justification [B] à 63. (68)
< <i>Et les autres objets, ils ne sont pas appariés ?</i> > (69)	Questionnement sur les propriétés de la situation. (69)
< <u>Si.</u> > (70a)	Approbation de 69. (70a)
< <b>Justement, on multiplie par 20.</b> > (70b)	Conséquence procédurale de 69. (70b)
< <u>D'accord.</u> > (71a)	Approbation de 58b, 64 à 67 et 68. (71a)
< <i>Ça fait combien ?</i> > (71b)	Questionnement du résultat de 58c. (71b)

Cet extrait correspond à un échange résolutif initialisé par l'opposition (réplique 54) à la proposition d'une procédure (réplique 53) dont on ne connaît pas la justification (la réplique 55 est coupée). L'acte discursif lié à la réplique 54 est réussi puisqu'il produit un certain nombre de confrontations contradictoires caractérisant une négociation sur le sens de la donnée inférée 19. Il est satisfait puisque qu'il s'achève sur un consensus : Lucile semble s'approprier du contenu propositionnel < *Chaque objet est apparié à 19 objets.* > (71a) et l'intégrer dans son action en demandant le résultat de l'opération (71b) qui correspond :  $19 \times 20$ .

Cette séquence relève bien d'un conflit socio-cognitif dont il est possible de différencier les contenus des arguments opposés. Ainsi, l'homogénéité de cet échange permet d'associer la procédure  $19 \times 20$  aux contenus propositionnels que revendiquent Cédric et Yaëlle : < *Chaque objet est apparié à 19 objets* > et < *Un objet n'est pas apparié avec lui-même.* >. En contre partie, Lucile ne partage pas ces significations dans le sens où elle intègre difficilement la donnée inférée 19 (le nombre d'appariements possibles par objet) dans sa représentation du problème : elle semble ne s'en tenir qu'aux données explicitées dans l'énoncé. Les répliques 56 et 61 le montrent bien.

L'échange est clos puisqu'elle fini par accepter le point de vue des autres. Mais l'intégration n'est pas vraiment réalisée puisque cet élève sera à l'origine d'un nouveau conflit sociocognitif qui fera l'objet de l'échange 136 – 146 (cf. page 152 et suivantes) ; le travail de ce groupe d'élèves s'achèvera en fait sans que Lucile puisse vraiment changer de point de vue.

### **C. Résumé de notre approche théorique, conséquences méthodologiques et commentaires pratiques**

Il est temps à présent de résumer l'ensemble de ces points théoriques, d'en définir les conséquences méthodologiques et d'en donner les limites. Rappelons, tout d'abord que notre projet est de rendre compte des relations plus ou moins complexes entre certains aspects des contextes sémantiques (les différents modèles combinatoire implicites), et les réponses produites en terme de procédures et de justifications. Pour rendre compte de cette activité mentale définie en terme de significations, nous cherchons à développer des « modèles de résolution » et qui se situent à la croisée de plusieurs dimensions :

- les caractéristiques mathématiques des problèmes que nous avons posés aux élèves qui ont participé à notre expérimentation (dénombrement de combinaisons),
- les caractéristiques sémantiques des énoncés ce qui renvoie non seulement à la nature des modèles combinatoires implicites, mais aussi à celle des objets qui constituent les collections de référence,
- les caractéristiques socio-cognitives relatives à l'émergence, au cours des interactions, de significations liés à l'interprétation du contexte sémantique. Ces significations sont liées à des procédures en étant déterminées par des connaissances opératoires. Rappelons enfin que les processus en jeu relèvent de la représentation et donc sont médiatisés par des registres sémiotiques. Ainsi l'analyse des écritures et schématisations comme celle des procédures et des justifications permettent de remonter aux significations.

Nous avons vu que la tâche définie par l'épreuve « Atelier » est une résolution collective de problème, ce qui introduit les élèves du groupe dans un environnement collaboratif. Ce contexte est caractérisé par des processus de négociation portant sur les

significations en jeu. Nous considérons ainsi que la collaboration est un processus d'élaboration de significations, de conceptions partagées qui intervient dans les processus d'interprétions et qui porte sur la situation de référence évoquée dans l'énoncé du problème.

Par conséquent, au contraire de l'épreuve « Devoir sur table », nous nous focalisons sur l'émergence de solutions au niveau du groupe. Nous pensons que le modèle explicatif qui résulte de l'analyse des protocoles de l'épreuve « Atelier », de nature sociale, est certainement transférable aux réponses recueillies à l'épreuve « Devoir », de nature individuelle. Notre idée est d'observer ces moments de négociation parce que l'argumentation que les élèves y déploient justifie ou réfute telle ou telle proposition de réponse. Ces explicitations portent sur l'interprétation de l'énoncé du problème donc, sur les significations que les élèves élaborent.

Ici se pose le problème des outils à élaborer et mettre en œuvre pour réaliser l'analyse de l'argumentation : comment distinguer dans le corpus des séquences d'interactions suffisamment significatives pour répondre aux questions que nous nous posons. Avant de les présenter, il est nécessaire de rappeler l'hypothèse qui oriente notre travail à partir des éléments théoriques décrits ci-dessus (cf. sous IV.2, p. 148). Les processus de résolutions (réalisés par des procédures) sont liés au partage de significations au niveau du groupe qui les a élaborés. Ces représentations concernent, d'une part, les propriétés de la situation à traiter, d'autre part, le but à atteindre, enfin, les codes des différents registres sémiotiques mis en œuvre pour médiatiser ces processus. Enfin, nous considérons que ces significations qui concernent la situation accompagnent de façon corrélative ou causale de procédures spécifiques. C'est dans cette perspective que notre analyse des protocoles s'organise. Il s'agit bien de rendre compte des modèles résolutaires décrits en tête de cette section afin de rendre compte des effets sémantiques (en particulier, ceux qui sont liés à la nature des modèles combinatoires implicites) sur les processus de résolution. Pour faire ce travail, nous avons conçu deux outils d'observation inspirés de ceux qui sont proposés par l'Analyse séquentielle et illocutoire et par l'analyse hiérarchique.

D'autres auteurs ont eu recours à de tels outils comme Vantourout (2004) qui emprunte et adapte certains concepts et méthodes du cadre de la linguistique en fonction

des questions posées et des particularités des interactions observés tout en évitant de les dénaturer le moins possible. Ce qui demeure important, c'est de contrôler la distance prise entre leurs définitions linguistiques et les définitions opérationnelles que nous leur attribuons : « *De ce qui précède, nous retirons qu'il nous semble important de pouvoir nous situer par rapport aux acceptions des concepts et des notions linguistiques afin de maîtriser le processus de prise de distance et d'appropriation dans lequel nous les engageons.* » (ibid., p. 117)

Nous nous démarquons donc des travaux qui utilisent les analyses illocutoires et hiérarchiques pour étudier certaines structures caractéristiques des interactions liées aux intentionnalités collectives (les débats, les négociations, les prises de décisions collectives par exemple). Nous faisons ici référence, par exemple, aux travaux de Ghiglione et Trognon (1993), Trognon et Larrue (1994), Trognon et Kostulsky (1996), Trognon et Galimberti (1996). Cependant, leurs domaines de recherche ne correspondent pas tout à fait à notre problématique qui se centre sur les processus engagés en résolution de problème et non pas sur les relations possibles entre l'élaboration d'un discours type et l'enjeu de l'interaction qui le réalise.

Tout d'abord, notre analyse du corpus doit relever certaines séquences spécifiques compte tenu des questions qui nous intéressent. Ces séquences, nous les définissons en terme d'échanges résolutaires. C'est, en effet, au niveau des processus de résolutions qu'interviennent les propriétés sémantiques des énoncés de problème. Ensuite, les processus de négociation composant ces séquences coordonnent un certain nombre d'unités constitutives, les conduites interactives qui constituent la trame de la négociation.

L'idée de « conduites interactives » est une adaptation à notre problématique des notions théoriques d'actes discursifs et illocutoires. Comme elle, les conduites interactives sont caractérisées par une fonction sociale (analogue à la force illocutoire) qui s'applique sur un contenu renvoyant à l'état du monde (un référent et un prédicat). Les conduites interactives sont médiatisées non seulement dans un registre langagier (ce sont alors proprement des actes discursifs) mais aussi graphique (schémas, tableaux) et arithmétique (opérations). La notion de conduite interactive est donc plus générale que celle d'acte illocutoire. D'un point de vue méthodologique, le découpage du corpus en

conduites interactives suit la règle suivante : au sein d'un processus collaboratif, il y a changement de conduite interactive (chez un locuteur ou entre interlocuteurs) chaque fois qu'une modification apparaît, soit sur le plan pragmatique de sa fonction sociale, soit sur le plan sémantique de son contenu.

Un découpage du corpus en « conduites interactives » est nécessaire pour définir la trame même de la négociation. Cependant, une analyse à ce niveau du discours ne suffit pas pour nous permettre de réaliser notre projet : une lecture linéaire des conduites interactives du corpus montre qu'elles peuvent être non seulement coordonnées entre-elles, (pour constituer un échange, comme nous allons le voir) mais aussi qu'elles peuvent être simplement juxtaposées (les élèves ne communiquent pas), ou croisées (plusieurs échanges sont ouverts en même temps), ou encore enchâssés (certains échanges sont inclus dans d'autres). Nous avons donc introduit la notion « d'échange résolutoire » qui permet, d'une part, de saisir certaines cohérences dans la non linéarité des séquences possibles et, d'autre part, de justifier, dans un contexte de collaboration, des liens spécifiques entre la réalisation de procédures particulières et les interactions qui constituent l'élaboration de ces réponses. Ce lien se définit en terme « d'homogénéité » des séquences comme nous le précisons à présent.

La notion d'échange que nous utilisons est issue de l'analyse hiérarchique développée par Roulet et collaborateurs (1985). Nous considérons qu'un échange est une séquence close quand la conduite interactive qui l'a initiée est satisfaite, donc réussie. Cette idée a donc pour origine la logique illocutoire et intentionnelle de Searle et Vanderveken (1985) et en retiendrons dans ce cadre que les propriétés de réussite et de satisfaction des actes illocutoires sont principalement déterminées par leur but, qui est un des composants de leur force (la fonction sociale de l'illocution).

Dans cette recherche, nous pouvons définir deux niveaux de réussite et de satisfaction : le premier est lié au but collaboratif (résoudre le problème) et le second, plus locale, est lié à la fonction sociale des différentes conduites interactives qui compose la trame de la séquence. Si le premier ne présente pas de difficulté de compréhension, le second mérite une explication. Nous pouvons dire qu'à ce niveau, il y a satisfaction (donc réussite de l'interaction) si l'action d'un des élèves qui a initialisé la négociation est satisfaite, à la fois, par l'émergence d'un consensus plus ou moins établi sur les pro-

priétés de la situation, et surtout par la mise en œuvre d'une procédure particulière cohérentes avec ces propriétés. Nous parlons dans ce cas d'échange résolutoire. Nous définissons donc cette entité comme une séquence homogène qui tend à répondre aux propriétés de réussite et de satisfaction et qui est principalement caractérisée par des conduites assertives (elles concernent alors les propriétés de la situation) et procédurales (elles concernent son traitement).

Il s'agit à présent d'éclaircir cette notion d'homogénéité relative aux échanges. Il nous faut accepter l'idée selon laquelle le déroulement d'une séquence peut être déterminé par la façon dont les interactions remplissent ou non ces propriétés de réussite et de satisfaction. La négociation des significations se caractérise alors par des processus de régulation jouant sur les interactions jusqu'à l'accomplissement de ces propriétés. Ce sont ces processus de régulation qui assurent à l'échange son caractère homogène. Et ce dernier justifie l'existence d'une relation effective entre les différentes conduites interactives qui composent l'échange, qu'elles soient assertives ou procédurales.

La notion d'échange résolutoire présente un intérêt méthodologique. Nous pouvons compléter un premier jalonnage thématique du corpus en terme de procédures par un découpage fonctionnel centré sur les processus de résolution (co-élaborations de significations au cours de la négociation et réalisations de procédures). Il va sans dire que les échanges résolutoires n'épuisent pas l'ensemble des séquences possibles qui peuvent découper notre corpus. Mais ils peuvent mettre en évidence l'influence d'un effet de nature sémantique sur l'élaboration des significations et, donc, sur la résolution du problème. Par conséquent, c'est bien sur eux que nous focalisons notre attention. Enfin, ce découpage est de nature fonctionnelle parce que les échanges résolutoires présentent les propriétés suivantes :

- une fonction de contrôle de l'action et de renforcement des significations par des échanges de type co-construction et par des collaborations acquiesçantes,
- une fonction de déstabilisation des significations à tous les niveaux par des conflits socio cognitifs et des contradictions non argumentées.

Nous allons maintenant présenter la réalisation d'une analyse en terme de conduites interactives (et d'actes de discours) et d'échanges résolutoires.



### **3. Exemple d'analyse en terme de conduites interactives et d'échanges résolutives**

Le Tableau XXVII (page 180.) présente l'analyse du protocole 01 en terme de conduites interactives (essentiellement des actes discursifs) et d'échanges résolutives. Nous avons choisi ce protocole parce qu'il présente un cas singulier d'élève (Lucile) dont l'interprétation de l'énoncé (en terme de partition de la collection) résiste particulièrement aux tentatives de déstabilisation produites par ses camarades. Ce protocole est donc riche en conflits socio-cognitifs bien qu'ils prennent tous la même forme : Lucile ne comprend pas d'où sort la donnée 19 qu'il faut multiplier par 20 pour trouver la solution. Les autres élèves lui expliquent à chaque fois que chacun des 20 randonneurs salue les 19 autres mais elle refuse cette interprétation en arguant que dans l'énoncé du problème, on parle de 20 randonneurs mais pas de 19. Lucile ne s'en tient qu'aux seules données explicitées dans l'énoncé (20 randonneurs pour le groupe et 2 randonneurs pour une poignée de mains) et produit donc une partition des 20 objets de la collection en 10 groupes de 2. Comme cette forme de réponse fautive est très répandue sur l'ensemble des deux épreuves, nous en présentons là un des cas les plus typiques.

Rappelons que les régularités que cette analyse cherche à mettre en évidence concernent les liens possibles entre des procédures spécifiques et certaines significations que les élèves élaborent à partir des énoncés des problèmes qui leur sont posés. Ces significations sont déterminées par certains facteurs qui sont, d'une part, les connaissances opératoires disponibles chez les élèves et, d'autre part, les contextes sémantiques qui caractérisent nos différents énoncés de problème et qui relèvent de la sémantique des objet et celle des relations (les modèles combinatoires implicites).

#### **A. Présentation de l'analyse**

Ce tableau est composé de trois parties. La première présente les différentes répliques qui accompagnent le travail collaboratif des élèves (numéro de référence de la réplique, élève qui la produit, énoncés échangés et écritures produites). La seconde partie concerne les conduites interactives (fonction relationnelle et contenu propositionnel de la conduite) qui constituent la trame de l'élaboration collaborative de la réponse. La troisième partie concerne l'analyse du corpus en terme d'échanges résolutives (séquen-

ces fonctionnelles et séquences thématiques). Avant d'entrer dans les détails, nous voudrions souligner la difficulté parfois rencontrée pour procéder aux différents découpages du protocole. Nous les expliquons à la suite du tableau, au fur et à mesure des commentaires qui accompagnent notre analyse. Ces découpages ne sont pas tout à fait satisfaisants mais ils permettent de jalonner suffisamment le corpus pour en faire une analyse effective compte tenu de notre projet.

La première colonne donne les numéros des répliques des élèves. Une réplique concerne un tour de parole. Il est clos quand un autre élève prend la parole ou quand le même élève reprend la parole après un silence. La notion de réplique ne recouvre pas forcément celle de conduite interactive puisqu'une réplique peut contenir plusieurs de ces dernières s'il y a changement de fonction ou de contenu de l'énoncé au cours de son expression. Nous pouvons observer cela à la réplique 58, par exemple où Cédric renforce d'abord la mise en évidence d'une propriété de la situation (réplique 52) puis conclue par une opération ( $19 \times 20$ ) inférée à partir de cette propriété :

58. Cédric : *Si, si. Elle va serrer la main à 19 personnes. Elle va serrer la main à 19 personnes. Une personne fait 19 mains et on multiplie 19 par 20.*

D'autre part, une même conduite interactive peut être contenue dans plusieurs répliques s'il n'y a aucun changement de fonction ou de contenu dans le discours des différents interlocuteurs qui se succèdent. C'est le cas des répliques 22 à 25 qui renforcent la mise en évidence d'une propriété de la situation sur le nombre de saluts à considérer entre deux randonneurs (réplique 21) :

22. Lucile : *Oui, un seul salut.*  
 23. Cédric : *Ah, oui !*  
 24. Yaëlle : *Ça fait un seul...*  
 25. Cédric : *Ça ne fait pas deux saluts.*

La deuxième colonne donne le nom de l'élève associé à la réplique. Pour des raisons de facilité de lecture, ils ne sont pas disposés à la même place dans la cellule du tableau. Ainsi, Lucile est à gauche, Cédric au centre et Yaëlle à droite de la cellule. Cette disposition reproduit leurs places respectives face à la caméra qui a enregistré leur travail.

Dans la troisième colonne, nous avons retranscrit les paroles des élèves, leurs écrits (en gras) et les gestes qu'ils produisent parfois (en italique). Une réplique, relative à un élève, peut donc contenir des énoncés appartenant à différents registres comme par exemple la réplique 139 de Cédric qui produit un schéma (dans un registre graphique) pour appuyer ses explications (dans un registre langagier). Nous avons mis entre guillemets leur lecture à voix haute des l'énoncé du problème (exemple, réplique 20) ainsi que le texte qu'ils écrivent pour justifier leur réponse en fin de séance (exemple, répliques 94 à 97).

La troisième colonne concerne une approche des différentes fonctions relationnelles des conduites interactives que les élèves mettent en œuvre au cours de leur collaboration pour résoudre collectivement le problème. Cette colonne peut définir un premier niveau de découpage en terme d'échanges dans le mesure où la plupart des séquences qui apparaissent alors sont homogènes : elles sont réussies puisque leur fonction est effective dans la séquence et elles sont closes par la satisfaction de la conduite qui les a initialisées. Certaines sont très courtes, comme par exemple l'échange constitué des répliques 3 et 4 (demande de justification / explication) :

*Lucile : Ben, oui, et pourquoi ? Comment t'as trouvé ça ?*

*Yaëlle : Ben, c'est  $2 \times 10$ .*

D'autres sont plus longues comme l'échange constitué des répliques 12 à 18 qui commence par une opposition de Yaëlle à une réponse proposée (12a) suivie d'une justification de cette objection (12b et 14). Cette argumentation permet à Cédric de conclure en 15 avec l'opération  $20 \times 20$ , renforcée par l'approbation de Yaëlle (16) suivie par le calcul du résultat (répliques 17 et 18) :

12. *Yaëlle : Non ce n'est pas ça parce que chaque personne serre la main à chaque personne.*

13. *Lucile : Deux personnes...*

14. *Yaëlle : Il n'y a pas une personne qui serre la main à une personne. Il y a 20 personnes qui serrent la main à 20 personnes.*

15. *Cédric : Ben ça fait  $20 \times 20$ .*

16. Yaëlle : *Oui, voilà.*

17. Cédric : *Quatre cents.*

18. Lucile : *Quatre cents serrés de mains...*

Il s'agit bien d'un échange puisque l'objection justifiée de Yaëlle a produit une nouvelle réponse qu'elle approuve. Cette séquence correspond même à un échange résolutoire dont l'assertion est *< Chaque objet est apparié à chacun des autres >* et la réponse qui en ressort est l'opération 20x20. Cet échange étant homogène parce que réussi et satisfait, nous pouvons donc associer cette procédure à cette assertion par un lien de nécessité. Les différentes séquences observées (réussies ou pas, satisfaites ou pas, résolutoires ou autres) sont séparées entre elles par des lignes horizontales plus épaisses dans la quatrième colonne.

La cinquième colonne présente les différents contenus des énoncés produits par les élèves. Nous avons souligné les contenus assertifs qui se réfèrent à la situation traitée et en évoquent les propriétés. Les énoncés portant sur des randonneurs et des poignées de mains ont été traduits en termes généraux d'objets et d'appariement. Cette transformation permet entre autre de comparer, au niveau des assertions, des protocoles renvoyant à des situations différentes.

12. Yaëlle : *Il n'y a pas une personne qui serre la main à une personne. (12a) Il y a 20 personnes qui serrent la main à 20 personnes. (12b)*

Contenus → 12a : Il n'y a pas 1 objet apparié à 1 objet.

12b : Il y a 20 objets appariés à 20 objets.

Nous avons mis en gras les énoncés qui se réfèrent à des procédures. Quand le contenu de l'énoncé est trop ancré dans la situation de référence et que nous n'avons pu en traduire le contenu en termes généraux d'objets et d'appariement, nous l'avons mis en italique, comme par exemple dans la séquence des répliques 120 à 123.

La sixième colonne propose un découpage en séquences fonctionnelles selon que l'échange a pour but un renforcement des significations et un contrôle de l'action (co-construction et collaboration acquiesçante) ou une déstabilisation de ces dernières (contradiction non argumentée et conflit socio-cognitif). Ces découpages ne sont pas

strictement juxtaposés puisque au sein d’une co-construction, on peut trouver un conflit socio-cognitif du fait que le groupe comprend trois élèves : deux sont en co-construction tandis que le troisième intervient avec une objection argumentée. C’est le cas, par exemple dans l’épisode V (répliques 35 à 41) :

35. Yaëlle : *Deux personnes, ça fait un salut.*

36. Lucile : *Un salut, oui.*

37. Yaëlle : *Pour avoir 20 personnes, ...*

38. Cédric : *C’est dix fois plus.*

39. Lucile : *Ben, faut 20 fois plus... Moi, je serais d’accord avec ça, hein ?*

40. Cédric : *Non, c’est dix fois plus...Eh ! 20 et deux, c’est dix fois plus, hein ?*

41. Yaëlle : *Ça fait trois cents.*

La dernière colonne concerne les séquences thématiques autour des procédures au fur et à mesure de leurs apparitions au cours des négociations. Elles sont constituées des échanges résolutifs proprement dits et déterminent les différents épisodes de la collaboration. Les séquences fonctionnelles liées au type de co-élaboration de la solution n’en sont que des parties, présentant des fonctionnements différents de la négociation (comme dans l’épisode 1<sup>26</sup>).

## B. L’analyse du protocole 01

### a. Le tableau de l’analyse

Il ne faut pas cacher la difficulté que nous avons rencontrée pour opérer les découpages du protocole selon les critères définis ci-dessus. Le tableau que nous présentons à présent n’est qu’une proposition de découpage même si nous avons cherché à le rendre aussi rigoureux que possible. Certains choix sont certainement contestables mais nos explications et commentaires sont là pour en garantir toute la transparence. Il faut donc prendre ce tableau comme une mise en place de repères à partir desquels nous

<sup>26</sup> Cf. page 193.

avons produit notre analyse. Cette dernière a donc été élaborée avec le souci constant de juger la pertinence du découpage sur lequel elle s'appuie.

**Tableau XXVII : Analyse de contenu du protocole 01 (association – salutations).**

Répliques			Conduites interactives		Echanges résolutaires	
Réf.	Elèves	Enoncés échangés et écritures produites	Fonctions relationnelles	Contenus	Séquences fonctionnelles	Séquences thématiques
1.	Lucile	Donc, il y a 20 personnes dans un groupe et elles se retrouvent... et donc deux personnes se retrouvent, ben elles se serrent la main, quoi c'est tout donc euh...  <b>20 p → 1 groupe</b> <b>2 p →</b>	Récapituler les données du problème.	<u>Il y a 20 objets dans la collection.</u> <u>2 objets sont appariés.</u>		<u>Episode I</u> proposition de réponse : procédure partitive $n/2$
2.	Cédric	C'est dix	Conclusion de 1 ?	Résultat : 10		
3.	Lucile	Ben oui, et pourquoi ? Comment t'as trouvé ça ?	Demande de justification de 2.	Pourquoi ?	Co-construction	
4.	Yaëlle	Ben, c'est 2x10.	Explication pour 3.	2x10		
5.	Lucile	Pourquoi, deux fois dix ?	Demande de justification de 4.	Pourquoi ?		
6.	Yaëlle	Ben, deux personnes... A chaque fois, t'as deux personnes...	Explication pour 5.	<u>1 appariement, c'est 2 objets.</u>	Conflit socio cognitif	
7.	Cédric	... et il y a 20 personnes qui se retrouvent...		<u>Et il y a 20 objets.</u>		
8.	Yaëlle	Ben, tu fais 20/2.	Conclusion de 6 et 7.	<b>20/2</b>		
9.	Cédric	Ben, ça fait dix.	Résultat de 8.	20/2 = 10		
10.	Lucile	Ça fait dix.				
11.	Cédric	Pour l'instant, c'est trop simple...	Evaluation de 1 à 10.	C'est trop simple.		
12.	Yaëlle	Non ce n'est pas ça parce que chaque personne serre la main à chaque personne.	Opposition pour 1 à 10. (12a) Justification à 12a. (12b)	<u>Non.</u> (12a) <u>Chaque objet est apparié à chaque objet.</u> (12b)	Conflit sociocognitif	<u>Episode II</u> proposition de réponse : procédure $n*n$
13.	Lucile	Deux personnes...		2 objets...		

14.	Yaëlle	Il n'y a pas une personne qui serre la main à une personne. Il y a 20 personnes qui serrent la main à 20 personnes.	Explication de 12.	Il n'y a pas 1 objet apparié à 1 objet. (14a) Il y a $n$ objets appariés à $n$ objets. (14b)			
15.	Cédric	Ben ça fait 20x20.	Conclusion de 12 à 14.	20x20			
16.	Yaëlle	Oui, voilà.	Approbation de 15.	Oui.	Coll. acq.		
17.	Cédric	Quatre cents.					
18.	Lucile	Quatre cents serrés de mains... <b>20 x 20 → 400 s m</b>	Renforcement de 14 et de 15.	20x20=400			
19.	Yaëlle	C'est un peu grand.	Evaluation de 17 et 18.	Le résultat est un peu grand.	Contradiction non argumentée		
20.	Lucile	Je n'ai pas très bien compris ce qu'ils nous demandaient. « Combien de poignées de mains sont échangées entre ces 20 personnes ? »	Doute sur le but.	« Combien de poignées de mains sont échangées entre ces 20 personnes ? »			Episode III proposition de réponse : procédure partitive $n/2$
21.	Yaëlle	Regarde, ces deux personnes quand elles se saluent, c'est un salut ou deux saluts ? ça fait bien un salut.	Mise en évidence d'une propriété de la situation.	1 ou 2 appariements entre 2 objets ?			
22.	Lucile	Oui, un seul salut.		1 appariement entre 2 objets.			
23.	Cédric	Ah, oui !					
24.	Yaëlle	Ça fait un seul...	Renforcement de 21.	1 appariement entre 2 objets.			
25.	Cédric	Ça ne fait pas deux saluts.		Pas 2 appariements entre 2 objets.			
26.	Lucile	Donc, on fait quoi comme opération ?	Interrogation sur la conclusion possible de 21 à 25.	Donc, quelle solution ?			



27.		Attends, ça fait un salut... Ça fait un salut de mains... Non, mais c'est ce que j'ai dit, il faut faire 20/2.	Conclusion de 21 à 25.	<u>1 appariement entre 2 objets</u> (27a) <b>donc 20/2. (27b)</b>	Conflit socio-cognitif		
28.	Yaëlle	Non, c'est 20 personnes qui saluent chacun 20 autres. Chacun salue 20 personnes.	Opposition de 21 à 27.	<u>Non.</u> (28a) Il y a 20 objets appariés à 20 objets. Chaque objet est apparié à 20 objets. (28b) <u>Chaque objet est apparié à chacun des autres.</u> (29a) Donc Résultat : 200 (29b)			
29.	Cédric	Tout le monde fait un serré de main à chacun donc ça fait deux cents, non ?	Renforcement et conclusion de 28.	Quelle opération ?			
30.	Lucile	Mais quelle opération t'as fait pour trouver deux cents ?	Demande de justification de 29.	<b>(20x20)/2 = 200</b> (31a) parce que 2 objets ne font pas 2 appariements. (31b)		Collaboration acquiesçante	Episode IV proposition de réponse : procédure corrigée (n*n)/2
31.	Cédric	Ben, j'ai divisé quatre cents par deux parce que ça ne fait pas deux saluts.	Justification de 29.	<u>2 objets appariés font 1 appariement.</u> <u>Oui.</u> Donc résultat : 200			
32.	Yaëlle	Quand deux personnes serrent la main, ça fait un salut.	Renforcement de 31.				
33.	Lucile	Ça fait un salut, oui.	Conclusion de 29 à 33.			Co-construction	Episode V proposition de réponse : mie en œuvre des propriétés de la proportionnalité « 2 objets font 1 appariement, n objets en font n/2
34.	Cédric	Donc, voilà. Ça fait deux cents.	Reprise de 21 à 25.	<u>2 objets font 1 appariement.</u> <u>20 objets...</u>			
35.	Yaëlle	Deux personnes, ça fait un salut. <b>2 p → 1 salut</b> <b>20 p →</b>	Approbation de 35.	<u>2 objets font 1 appariement.</u> <b>20 objets font...</b>			
36.	Lucile	Un salut, oui.	Conclusion de 35 et 36.	<b>20 objets font 10 fois plus.</b>	Conflit socioco-		
37.	Yaëlle	Pour avoir 20 personnes, ...		<b>20 objets font 20 fois plus.</b>			
38.	Cédric	C'est dix fois plus.					
39.	Lucile	Ben, faut 20 fois plus... Moi, je serais d'accord avec ça, hein ?	Conclusion alterne de 35 et 36.	<b>20 objets font 20 fois plus.</b>			

40.	Cédric	Non, c'est dix fois plus...Eh ! 20 et deux, c'est dix fois plus, hein ?	Opposition à 39, justification de 38.	20 objets font 10 fois plus car 20, c'est 10 fois plus que 2.	gnitif	fois plus. »
41.	Yaëlle	Ça fait trois cents.	Conclusion de 35 à 40.	Résultat : 300		
42.	Lucile	Trois cents ? Pourquoi trois cents ?	Demande de justification de 41.	Pourquoi 300 ?	Conflit sociocognitif	Episode VI propositions- con fuse de réponse
43.		Attends, ... attends, ... quand t'as une personne, ok ?	Justification de 42.	Avec 1 objet...		
44.	Yaëlle	Regarde, une personne, elle va serrer la main à 20 personnes.	Explication pour 42.	1 objet est apparié à 20 objets.		
45.	Lucile	Attend, attend, oui...Mais, non, il n'y a qu'une personne qui a serré la main à 20 personnes.	Mise en évidence d'une propriété de la situation.	Il n'y a qu'1 objet apparié à 20 objets.		
46.	Yaëlle	Ecoute-moi. Une personne va serrer la main à 20 personnes ; après on fait le résultat, après on multiplie...	Explication pour 42 (suite).	1 objet est apparié à 20 objets.		
47.	Cédric	Mais, toutes les 20 personnes...	Justification pour 42 (suite).		Contradiction non argumentée	
48.	Yaëlle	On multiplie les 20...				
49.	Lucile	Mais toutes les 20 personnes, d'accord.	Conclusion de 46.	10x20	Conflit sociocognitif	Episode VII proposition de réponse : procédure $n^{*}(n-1)$
50.	Cédric	On multiplie 10 par 20.	Conclusion alterne.	20x2		
51.		Non, on fait 20 fois 2.	Mise en évidence d'une propriété de la situation.	1 objet est apparié à 19 objets.	Conflit sociocognitif	
52.	Yaëlle	Attends, une personne, elle serre la main à 19 personnes...	Renforcement de 51.	20x2		
53.	Lucile	On fait 20 fois 2 !	Oppositions à 52.	Non.		
54.	Cédric	Mais non !	Justification de 52.	Il y a 20 objets.		
55.	Lucile	Mais non, c'est 20 personnes...		L'objet est compris dans la collection.		
56.	Yaëlle	Mais non, puisque elle comprise...				

57.	Lucile	Mais non. Il n'y a pas marqué : « Elle comprise. »	Opposition à 56.	Non. (57a) Ce n'est pas marqué dans l'énoncé. (57b)	
58.	Cédric	Si, si. Elle va serrer la main à 19 personnes. Elle va serrer la main à 19 personnes. Une personne fait 19 mains et on multiplie 19 par 20. <b>1 =&gt; 19 mains</b>	Renforcement de 52. Conclusion.	<u>Si.</u> (58a) <u>1 objet est apparié à 19 objets.</u> (58b) <b>19x20</b> (58c)	
59.	Lucile	Je ne suis pas trop d'accord.	Opposition à 58.	Non.	
60.	Yaëlle	Pourquoi ?	Demande de justification de 59.	Pourquoi ?	
61.	Cédric	On multiplie 19 par 20.	Renforcement de 58.	<b>19x20</b>	
62.	Lucile	Non, non, non. Ce n'est pas ça. Je suis sûre que ce n'est pas ça. Il n'y a pas forcément écrit ça. C'est un exemple. Il n'y a pas forcément écrit que ces personnes là faisaient parti. Il y a juste marqué 20 personnes. On ne se casse pas la tête, il y a 20 personnes c'est pas 19. Il y a juste écrit 20 personnes.	Justification de 59.	<u>Il y a juste écrit 20 objets.</u> (62a) <u>Il y a 20 objets et pas 19.</u> (62b)	
63.	Cédric	Non t'as pas compris, si t'enlèves...	Opposition à 62.	Non. (63a) Tu n'as pas compris. (63b)	
64.	Yaëlle	On te dit qu'on prend une personne du groupe...	Explication de 63.	<u>On prend 1 objet de la collection. Il s'apparie avec 19 objets.</u> <u>Il ne s'apparie pas lui-même.</u>	
65.	Cédric	On prend une personne du groupe...			
66.	Yaëlle	Si on prend une personne du groupe, elle va serrer la main à 19 personnes...			
67.	Cédric	Elle va serrer la main à 19 personnes.			
68.	Yaëlle	Elle ne va pas serrer la main à elle-même.			
69.	Lucile	Et les autres ils ne se serrent pas les mains ?	Opposition pour 64 à 68.	<u>Et les autres ne s'apparient pas ?</u>	

70.	Cédric	Mais si, mais justement, on multiplie par 20.	Explication pour 69.	Si. Justement, on multiplie par 20.	
71.	Lucile	D'accord, et ça fait combien ?	Approbation de 70.	<i>D'accord. (71a)</i> <i>Quel est le résultat ? (71b)</i>	Co-construction
72.	Cédric	19 multiplié par 20... zéro, euh, deux fois neuf dix-huit...	Résultat de la réponse.	19x20=380 appariements.	
73.	Lucile	Le résultat est 380 saluts de mains. Ok ? Et les explications, ben on a fait...			Conflit sociocognitif
74.	Yaëlle	On s'est trompés...	Evaluation de la réponse.	<i>C'est faux.</i>	
75.	Lucile	Moi aussi, je pense qu'on s'est trompé. Mais non. Mais on a marqué, on a marqué maintenant.		<i>Non.</i>	
76.	Cédric	Non, non, attends.	Opposition à 74 et 75.		
77.	Lucile	On a marqué, on a marqué ! Non, je ne suis pas d'accord. Non, je suis sûre qu'il y a de la division, dedans.	Justification de 75.	« <i>Non. (77a)</i> <i>Je suis sûre qu'il y a de la division, dedans. » (77b)</i>	
78.	Cédric	Si, si, ça fait ça.	Renforcement de la réponse.	Si, c'est juste.	
79.	Lucile	Entre ces 20 personnes...	Justification de 75 (suite).	Entre ces 20 objets...	
80.	Yaëlle	Là, pour t'expliquer, on te montre l'exemple d'une personne.	Explication pour 75 et 79.	Pour t'expliquer, on prend l'exemple d'un objet.	
81.	Lucile	Non de deux personnes. « Un groupe de 20 randoeurs se rencontrent et se saluent avec la main droite... » Ça c'est un exemple. Après on te dis le problème : « Ce dimanche matin, 20 personnes... » donc, déjà, dimanche matin, on n'en a pas besoin... « 20 personnes du groupe se retrouvent. Combien de saluts sont échangés en tout ENTRE ces 20 personnes ? »	Opposition à 80.	Non. De 2 objets. (81a) Relecture de l'énoncé du problème : Combien d'appariements ENTRE ces 20 objets ? (81b)	


82.	Yaëlle	Ben, oui. Les 20 personnes ne vont pas serrer la main à une personne.	Mise en évidence d'une propriété de la situation.	<i>Oui.</i> (82a) <u>Les 20 objets ne sont pas appariés à un objet.</u> (82b) <u>Ils sont tous appariés ensemble.</u> <b>Donc, 19x20.</b> Pourquoi n-1 ?		
83.	Lucile	Oui, ils vont tous se serrer la main.				
84.	Cédric	Donc ça fait 19 fois 20.	Conclusion de 82 et 83.			
85.	Lucile	Mais pourquoi 19 ?	Demande d'explication pour 84.			
86.	Cédric	Non, tu n'as pas compris...				
87.	Yaëlle	Mais, on t'a expliqué.				
88.	Cédric	Il ne va pas se serrer la main. Tu va pas faire comme ça ( <i>il se serre la main à lui-même</i> ).	Explication à 85.	<u>Un objet ne s'apparie pas avec lui-même.</u>		
89.	Lucile	Ah, oui !	Approbation de 88.	Ah, oui !		
90.	Cédric	On est 20... Tu ne vas pas faire comme ça ( <i>il se serre la main à lui-même</i> ), tu vois ? Tu fais partie des 20. Tu t'enlèves et tu serres les mains à tout le monde. Ça fait 19, si tu t'enlèves.	Explications à 85.	<u>Un objet ne s'apparie pas à lui-même.</u> (90a) <u>Chaque objet se distingue des 19 autres pour s'y appaier.</u> (90b) <i>C'est ça.</i>		
91.	Yaëlle	Oui je pense que c'est ça.	Approbation de 90 et de 73.			
92.	Lucile	Donc, en fait, je marque quoi ?				
93.	Cédric	Eh ben tu fais les calculs, tu fais euh...				
94.	Lucile	« Sachant...				
95.	Cédric	« Une personne serre 19 mains... »				
96.	Lucile	« Sachant... Sachant que... »				
97.	Yaëlle	« Sachant qu'une personne va serrer la main à 19 personnes, on multiplie le résultat par 19. »	Explication et rédaction des propriétés de la situation qui justifient la réponse retenue.			
98.	Lucile	Mais, pourquoi « sachant qu'une personne » ? ça n'a pas de sens, « sachant qu'une personne... »	Demande d'explication pour 97.	<i>Pourquoi dire : « Sachant qu'une personne... » ?</i>		
					Co-construction	
						Conflit sociocognitif
					Episode VIII Rédaction de la justification demandée par le protocole.	

99.	Yaëlle	Parce que tu fais d'abord pour une personne et après tu multiplies par 20.	Justification pour 98.	On dénombre les appariements pour 1 objet et après, on multiplie par 20.		
100.	Cédric	Regarde, une personne serre 19 mains ; alors 20 personnes serrent 380 mains.		<u>1</u> objet est apparié à <u>19</u> fois ; alors 20 objets sont appariés à 380 fois.		
101.	Lucile	D'accord. Alors, « sachant...	Approbation à 99 et 100.	<i>D'accord.</i>	Co-construction	
102.	Cédric	« Tu multiplies le résultat par 20. »	Explication et rédaction des propriétés de la situation qui justifient la réponse retenue.			
103.	Lucile	« Sachant qu'une personne... », quoi ?				
104.	Cédric	« ... qu'une personne serre la main à 19 personnes, 19 mains... non : 19 personnes. »				
105.	Lucile	« ... serre... la ...main... » à quoi ?				
106.	Cédric	« ... à 19 personnes. »				
107.	Lucile	« à... 19 ... personnes...alors... »				
108.	Cédric	« Alors, on multiplie 19 par 20. »				
109.	Yaëlle	« Pour 20 personnes... »				
110.	Cédric	« Alors, pour 20 personnes... »				
111.	Lucile	« ... Alors, pour 20 personnes... »				
112.	Cédric	Et tu fais le calcul d'en bas.				
113.	Yaëlle	« On multiplie le résultat par 20. »				
114.	Cédric	Non, pour 20 personnes, c'est...				
115.	Lucile	« ... on ... multiplie... le... résultat ... par ...20. » Donc, je marque « 19 fois 20 », ok ? c'est trois...				
116.	Cédric	Non.	Opposition à 115.	Non.	Contradiction non argumentée	<u>Episode IX</u>

I17.	Lucile	Si, ça donne 380 saluts de mains. Mais je suis sûre pourtant qu'il y a une astuce là dedans... Attends, passe moi ça. Je ne suis pas d'accord.	Opposition à 115 encouragée par 116.	Je suis d'accord avec la réponse. (117a) Mais je suis pourtant sûre qu'il y a une astuce. (117b) Je ne suis pas d'accord avec la réponse. (117c)	Conflit sociocognitif
I18.	Yaëlle	Ben, vas-y explique pourquoi.	Demande d'explications à 117.	Pourquoi ?	
I19.	Lucile	Ben, je ne sais pas, non, 19 ...	Explication (impossible) pour 118.	La donnée n-1...	
I20.	Cédric	Là, par exemple, on est trois. Si je me retire, ça fait deux. Et je te serre la main, et je lui serre la main. Ça fait deux et pas trois.	Mise en évidence d'une propriété de la situation par référence au vécu possible, pour répondre à 119.	On est trois. Si je me retire, ça fait deux. Et je te serre la main, et je lui serre la main. Ça fait deux et pas trois.	
I21.	Lucile	Il n'y a pas marqué qu'il y en a un qui se retire.	Opposition à 120.	Il n'y a pas marqué qu'il y en a un qui se retire.	
I22.	Yaëlle	Mais on te montre l'exemple d'une personne, comme ça on comprend pour 20.	Explication pour 121.	Mais on te montre l'exemple d'une personne, comme ça on comprend pour 20.	
I23.	Cédric	Dans tout le monde, il y a 20 personnes et personne d'autre. Et les 20 personnes vont se serrer la main entre eux.		Dans tout le monde, il y a 20 personnes et personne d'autre. Et les 20 personnes vont se serrer la main entre eux.	
I24.	Lucile	D'accord... d'accord... Je ne suis pas d'accord.	Opposition à 120, 121 et 123.	Je ne suis pas d'accord.	
I25.	Yaëlle	Vous voulez tenter de faire un autre truc ?	Proposition de nouvelles recherches.		
I26.	Lucile	Attends, attends. Si on faisait... Résultat, trois cent quatre-vingts, divisé par 20.		Si on fait 380/20 ?	
I27.	Cédric	C'est égal à 19. Ça ne sert à rien.	Résultat de 126. Rejet.	Résultat : 19. Ça ne sert à rien.	

128.	Lucile	Excuse moi, excuse moi. Non, je cherche. 20, il y a 20 personnes. On va dire qu'il y a 20 personnes, pas 19. Ok, ok.	Opposition à 90.	On va dire qu'il y a 20 objets, pas 19...	
129.	Cédric	Il y en a une qui se retire... non, elle ne se retire pas, elle serre la main à 19 personnes. Elle ne va pas se serrer la main comme ça.	Explication pour 128.	<i>Une personne se retire. (129a)</i> <i>Elle ne se retire pas. (129b)</i> <i>Elle serre la main à 19 personnes. (129c)</i> <i>Elle ne se serre pas la main à elle-même. (129d)</i>	
130.	Lucile	Il n'y a pas forcément une personne qui va se retirer pour serrer la main. On dit 20 randonneurs.	Opposition à 129.	<i>Une personne ne se retire pas pour serrer la main. (130a)</i> <i>L'énoncé dit qu'il y a 20 randonneurs. (30b)</i>	
131.	Yaëlle	Oui, ben chaque personne va serrer la main à tout le monde.	Explication pour 130.	Chaque objet est apparié à tous les autres.	
132.	Cédric	Regarde, je te serre la main, je serre la main à Yaëlle. Je n'ai pas serré la main de trois personnes. Ben là, c'est pareil.		<i>je te serre la main, je serre la main à Yaëlle. Je n'ai pas serré la main de trois personnes</i>	
133.	Yaëlle	Il a serré la main de deux personnes, ben là c'est la même chose. Il ne se retire pas, il serre la main à toutes les deux.		<i>Il a serré la main de deux personnes. (133a)</i> <i>Il ne se retire pas. (133b)</i>	
134.	Cédric	Et c'est la main droite.	Explication complémentaire pour 130.	<i>On salue de la main droite.</i>	
135.	Lucile	Mais, on s'en fou si c'est la main droite. Ça c'est des truc pour te compliquer la vie.	Rejet de l'explication complémentaire 134.	<i>Ce détail n'est pas important pour le problème.</i>	



I36.	Cédric	Regarde, il y a 20 personnes. Je t'en dessine 20. <i>Cédric prend le feutre et commence à dessiner des cercles en deux rangées de dix pour représenter les 20 personnes.</i>	Explication pour 130.	Je dessine 20 objets : 1, 2, 3, ..., 19 et 20.	
I37.	Yaëlle	Non, attends, Cédric...		Non, attends, arrête...	
I38.	Lucile	Non, mais arrête !			
I39.		Non, elle ne comprend pas. Elle comprends pas... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20... Voilà. Imaginons cette personne. Elle va serrer la main à 1, 2 ... 18, 19, et t'as vu, là il a serré la main à 19 personnes. Juste ce mec là. <i>Cédric fixe, en le repassant, le cercle en haut et à droite de la double rangée (en gras). A partir de ce cercle, il trace des courbes qui le relient au autre sur la rangée du haut (du plus proche à côté au plus loin à gauche). Puis, pour la rangée du bas, du plus proche (en dessous) au plus loin (à droite sur la rangée du bas).</i>	Explications pour 130.	Elle ne comprend pas. (139a) Le premier objet est apparié à 1, 2, 3, ..., 18 et 19 objets. (139b)	
	Cédric			Chaque personne fait la même chose.	
	Yaëlle	Après chaque personne va faire la même chose.			
I40.	Yaëlle	Mais non : 19, et 20	Opposition à 139.		
I41.	Lucile	Elle montre une liaison déjà faite, la première.			

I42.	Yaëlle	Mais non.		Explication pour 141.		
I43.	Cédric	Mais, tu ne vois pas ? C'est déjà fait, là.				
I44.	Yaëlle	Et après, chaque personne va faire la même chose. Donc, c'est pour ça que tu multiplies par 20.		Explication pour 130.	Chaque personne fait la même chose. (144a) C'est pour cela qu'on multiplie par 20. (144b)	
I45.	Cédric	Mais c'est ça, c'est tout.				
I46.	Lucile	Mais j'ai compris, mais je ne suis pas d'accord.		Opposition à 139 et 144.	J'ai compris. (146a) Mais je ne suis pas d'accord. (146b)	
I47.	Yaëlle	Mais vas-y, alors.		Demande d'explication pour 146.		
I48.	Cédric	Pourquoi ?				
I49.	Lucile	Chez pas, c'est le 20 là qui ... 20 personnes là et deux personnes là... Attends, 20 divisé par deux, ça fait combien ?		Réponse alterne.		
I50.	Cédric	Ça fait dix.		Résultat de 149.		
I51.	Yaëlle	Ça fait dix. Donc, un groupe de...				
I52.	Cédric	Non, mais c'est évident.		Renforcement de 139, 140 et 144.		
I53.	Lucile	Non, chais pas... Ce n'est pas évident, franchement.		Doute contre 152.		Contradiction non argumentée
I54.	Yaëlle	Ben, relis l'énoncé une fois si tu veux.				
I55.	Lucile	« Sachant qu'une personne sert la main à 19 personnes, alors, pour 20 personnes on multiplie par 20. » Oui, d'accord, on reste.		Approbation de la réponse en 84.		
I56.	Yaëlle	On multiplie par 20, c'est tout. Ça fait 19 saluts et après, comme tout le monde va faire la même chose, ça fait 19 fois 20.				Co-construction

157.	Cédric	Je t'ai montré le mec, là... Ce mec là, il va serrer la main à tout le monde et ça fait 19 et pas 20.	Renforcement de 90.			
158.	Yaëlle	Et donc, maintenant, tu va...				
159.	Cédric	On est trois. Je te serre la main. Je lui serre la main. Ben, j'ai serré la main à deux personnes, mais pas à trois.				
160.	Yaëlle	Ok ou pas ?	Demande d'approbation de 159.			
161.	Lucile	Oui, si, si. Ça m'embrouille. Je n'aime pas le chif- fre 20, désormais...	Approbation de 159.			

## b. L'analyse des différents épisodes de la négociation

### • *L'épisode I :*

Cette séquence est thématisée par la procédure partitive liée à la réponse 20/2. Elle est constituée de trois échanges (répliques 1 – 2 ; répliques 3 – 4 ; répliques 5 – 10) bien qu'il soit difficile de qualifier le premier comme un échange proprement dit puisque rien ne nous permet de penser que la réplique 2 (la proposition d'un résultat : « *C'est 10.* ») réponde à la réplique 1 et éventuellement la satisfasse. Cette dernière récapitule les données du problème et n'a peut être même pas de fonctionnalité relationnelle : elle peut être une simple réflexion en langage intériorisée (en terme vygotkien), mais extériorisés. En contre partie, rien n'interdit de penser que la réponse de la réplique 2 (procédure partitive) ne soit pas influencée par l'écriture de Lucile (réplique 1) qui présente à la fois le tout (20 personnes) et une partie du tout (2 personnes). Cette présentation des données induit, comme nous le verrons ci-dessous, une partition de la collection d'où certainement la réponse de Cédric à la réplique 2.

En contre partie, l'homogénéité des deux autres échanges est mieux avérée. Le deuxième échange (répliques 3 et 4) est introduit par une demande d'explication concernant le résultat de Cédric. Cette demande de Lucile est réussie puisque Yaëlle lui répond à la réplique suivante (« *Ben, c'est 2 fois 10.* »). Mais elle n'est pas satisfaite puisque le troisième et dernier échange (répliques 5 à 10) commence par une nouvelle question de Lucile concernant l'explication apportée par Yaëlle. Cet acte discursif est une fois de plus réussi et il est satisfait puisque la réplique 10 de Lucile accepte le résultat trouvé, donc la procédure qui le produit et, donc, l'explication qui lui en assure sa légitimité : *< 1 appariement, c'est 2 objets >*, *< et il y a 20 objets >*<sup>27</sup> (répliques 6 et 7). Par cet accord, Lucile montre qu'elle a intégré la signification portée sur la situation par les deux autres élèves et, par là même, que sa demande initiale d'explication est satisfaite.

Il faut remarquer que cet échange est associé à l'échange précédent (répliques 3 et 4) dans la mesure où il continue une séquence de conflit socio-cognitif initialisé par la

---

<sup>27</sup> Nous mettons entre crochets *< et >* le contenu des assertions qui définissent les propriétés de la situation.

demande de justification de Lucile (réplique 3) sur le résultat trouvé par Cédric (réplique 2). Ce conflit cesse avec la réplique 7 de Cédric qui clôt l'explication. A partir de la réplique 6 jusqu'à la fin de l'échange, les élèves sont en co-construction dans la mesure où ils énoncent alternativement les propriétés de la situation (répliques 6 et 7), la réponse qu'ils en concluent (une procédure partitive  $n/2$ ) et le calcul de l'opération correspondante ( $20/2 = 10$ ). Remarquons que nous retrouvons dans le contenu des arguments pour rendre compte de la procédure partitive les mêmes données que celles qui ont été écrites au début de l'épisode par Lucile : le tout ( $< Il y a 20 objets > ; 20 p \rightarrow 1 \text{ groupe}$ ), est la partie du tout ( $< 1 \text{ appariement, c'est } 2 \text{ objets} > ; 2 p \rightarrow$ ).

C'est un exemple de chevauchement de séquences fonctionnelles (au sein d'une séquence thématisée par une procédure) ; elles participent de concert à l'échange résolutif qui constitue l'épisode (lui-même composé de trois échanges plus ou moins effectifs). C'est au prix de cette complexité qu'il est possible d'approcher, voire d'appréhender la réalité de la négociation entre les élèves. Ainsi, l'homogénéité de cet échange résolutif permet donc d'associer la procédure partitive  $n/2$  aux assertions concernant les propriétés de la situation :  $< 1 \text{ appariement, c'est } 2 \text{ objets} > ; < Il y a 20 \text{ objets à appairer} >$ .

### • L'épisode II :

Cet épisode concerne l'émergence d'une procédure de type  $n*n$  (cf. aussi page 157). Il commence (ou il est séparé du précédent) par une évaluation du travail de l'épisode I : « *C'est trop simple.* » (réplique 11) qui exprime un doute (non justifié) sur la validité de la réponse. Il n'est pas impossible que cet acte discursif soit lié aux suivants mais rien ne permet de l'introduire dans la suite de la négociation où il ne semble ni réussi, ni (a fortiori) satisfait par la réplique 12 de Yaëlle :  $< \text{Chaque objet est apparié à chaque objet.} >$

Cet épisode est constitué d'un seul échange. Il est donc principalement initialisé par le refus de la réponse précédente (la procédure partitive  $20/2$ ) par Yaëlle à la réplique 12. Yaëlle propose donc une autre interprétation de la situation. Elle introduit ainsi une nouvelle signification de la situation liée à une propriété qui n'avait pas été encore découverte par les élèves. Ce changement est radical puisque nous passons d'une représentation de la situation qui juxtapose des partitions de 2 objets à une représentation qui

coordonne chaque objet de la collection avec chacun des autres. Elle renforce son explication à la réplique 14 en rejetant d'abord l'interprétation précédente de l'énoncé par cette assertion : *< Il n'y a pas 1 objet apparié à 1 objet. >* (14a) et propose une nouvelle signification de l'énoncé : *< Il y a 20 objets appariés à 20 objets. >*

Ces deux actes discursifs (12a et 14a ; 12b et 14b) sont réussis puisque Cédric intègre la nouvelle signification portée sur la situation en inférant une forme de procédure qui peut lui correspondre :  $n*n$ . Cette réponse est de nature intermédiaire supérieure (cf. sous III.2.B, p. 71) : elle correspond bien à une activité combinatoire mais considère des appariements ordonnés et constitués du même objet. On peut considérer cette réponse, à ce stade de l'élaboration de la solution, comme une approximation du fait que toutes les propriétés de la situation n'ont pas été découvertes.

Ces deux actes discursifs sont non seulement réussis mais satisfaits puisque Yaëlle approuve la conclusion de Cédric à partir de ses assertions (réplique 16). Cédric et Lucile renforcent cette nouvelle signification en calculant le résultat (répliques 17 et 18).

L'épisode se conclut tout de même par une évaluation du résultat trouvé : « *C'est un peu grand.* » (réplique 19) qui peut déstabiliser la représentation en cours du problème. Comme cet acte discursif n'est pas argumenté, nous ne pouvons le considérer comme relevant d'un conflit socio-cognitif. Mais il peut être réussi puisque le travail des élèves ne s'arrête pas à ce moment du protocole. Cependant, il nous a paru difficile d'associer cette réplique à la suite de la négociation puisqu'il n'est, à aucun moment, satisfait ou rejeté.

D'une façon générale, la séquence fonctionnelle qui initialise cet épisode (répliques 12 à 14) a pour effet de déstabiliser la représentation initiale de la situation. En tant que conflit socio-cognitif (opposition argumentée qui permet l'émergence de nouvelles significations), elle est effective puisqu'elle se termine par une co-construction à partir de la nouvelle interprétation de la situation. Cet épisode semble donc bien correspondre à un échange résolutoire réunissant, du fait de son homogénéité (les actes discursifs sont y réussis et satisfaits), une assertion particulière à une procédure spécifique. Ainsi, la procédure  $n*n$  semble bien s'associer à cette assertion : *< Chaque objet de la collection est apparié à chacun des autres. >*

### • L'épisode III :

Cet épisode est thématisé par le retour de la procédure partitive  $n/2$ . Il est constitué de deux échanges. Le premier commence par un doute de Lucile sur le but de leur travail : « *Je n'ai pas très bien compris ce qu'ils nous demandaient...* » (réplique 20). Il est possible que ce doute réponde à l'évaluation de la réponse par Yaëlle (réplique 19). Mais nous ne pouvons l'affirmer.

Lucile alors relit à haute voix la question posée dans l'énoncé du problème. Cet acte discursif est réussi puisque Yaëlle l'aide à interpréter la situation : « *Entre deux objets, il n'y a qu'un appariement, mais pas 2.* » (réplique 21). Cette propriété de la situation est importante dans le cas de « l'association – salutations » puisque entre deux personnes, on peut considérer qu'il y a soit 1 salutation, soit 2 saluts échangés (A salue B et B lui rend son salut). Il y a donc dans cet épisode mise en place d'un consensus au sein du groupe d'élèves sur la signification de l'appariement.

Cependant, l'acte discursif associé à la réplique 20 de Lucile n'est pas vraiment satisfait puisqu'elle interroge à nouveau sur la réponse à apporter au problème et qui correspond à cette nouvelle propriété de la situation (réplique 26). Avec cette interrogation, commence le deuxième échange qu'elle satisfait elle-même en concluant (à partir de cette nouvelle donnée) la validité de la procédure partitive et le rejet de la procédure  $n*n$  (réplique 27). Cette représentation de l'appariement n'est en effet pas incompatible avec l'idée de partition de la collection : Lucile semble assimiler l'idée d'un appariement entre deux objets avec l'association de 2 objets comme partition du tout (au cours de l'épisode suivant, Cédric montre qu'il a inféré une autre réponse à partir de cette donnée).

D'un point de vue fonctionnel, le premier échange de l'épisode III (répliques 20 à 25) relève d'une co-construction. En contre partie, la réplique 27 initialise à la fois le deuxième « échange » (si on peut dire puisque Lucile n'échange à ce moment qu'avec elle-même : répliques 26 et 27) et un conflit socio cognitif qui s'inscrit aussi, et de façon importante, dans l'épisode suivant.

Cette séquence fonctionnelle (réplique 27 à 31), liée à deux épisodes, montre une fois de plus la difficulté de procéder à des découpages du corpus en séquences thématisées qui recoupent strictement des séquences fonctionnelles déterminées. Cepen-

dant, cette difficulté à circonscrire clairement certains échanges résolutaires est liée à la dynamique de la négociation qu'il est difficile de saisir du fait de sa complexité. Ce problème n'en n'est peut être pas un dans la mesure où nous recherchons, rappelons-le (cf. sous IV.2.C, p. 169), plutôt des cohérences que des limites au sein des échanges résolutaires. C'est bien l'homogénéité des échanges (liées aux propriétés de réussite et de satisfaction de ces derniers) qui nous permet d'associer des procédures particulières avec des assertions spécifiques relatives à la situation. De cette façon, par exemple, il est possible d'associer la nouvelle réponse que propose Cédric (réplique 29 dans l'épisode IV) avec sa réplique 23 de l'épisode III ; cette dernière correspond certainement à une prise de conscience liée au contenu de la principale assertion de cet épisode : *< On ne compte qu'un seul appariement avec 2 objets. >* A partir de la même signification portée sur la situation, Lucile et Cédric n'infèrent pas les mêmes conclusions puisque la procédure que propose ce dernier est une procédure corrigée et non une procédure partitive. Nous ne pouvons donc pas dire que cette assertion détermine ou accompagne une procédure spécifique.

#### • *L'épisode IV :*

L'épisode IV est donc thématique par une nouvelle forme de procédure que propose Cédric :  $(n*n)/2$ . Cette dernière est plus pertinente que celle de l'épisode II ( $n*n$ ) puisqu'elle prend en compte le fait que les appariements ne sont pas ordonnés. Cette évolution dans l'élaboration de la réponse est donc certainement due, comme nous venons de le voir, à la prise de conscience par Cédric (réplique 23 de l'épisode III) d'une propriété de la situation que met en évidence l'assertion *< On ne compte qu'un seul appariement avec 2 objets. >* Cependant, cette procédure relève encore des réponses intermédiaires supérieures puisqu'elle prend en compte des appariements constitués du même objet.

Cet épisode est constitué de deux échanges. Le premier continue le conflit cognitif entamé à la fin de l'épisode précédent. Lucile y avait conclu que s'il y a bien qu'un seul appariement possible avec 2 objets, alors il faut répondre au problème posé par une procédure partitive. Il est possible que cette réplique (27) soit à la fois la fin de l'échange précédent et le début du nouvel échange qui, lui appartient au nouvel épisode. En effet, cet acte discursif produit une réaction de la part de Yaëlle (réplique 28) qui, au



lieu de le satisfaire en rejette le contenu en rappelant cette assertion : *< Chaque objet de la collection est apparié à chacun des autres. >*. Et Cédric renforce (donc satisfait) cet acte en répétant son contenu et en concluant par un résultat : *< 200 appariements possibles. >* (réplique 29). Cette réponse est issue de la nouvelle forme de procédure qu'il semble avoir inféré :  $(n*n)/2$ .

Le deuxième échange de cet épisode commence par une demande d'explication de Lucile concernant ce résultat (réplique 30). Cédric dit qu'il a divisé par 2 le résultat de la procédure de l'épisode II ( $n*n$ ) en rappelant qu'entre deux objets, on ne considère qu'un seul appariement. Cette réponse est renforcée et donc satisfaite par Yaëlle et Lucile qui la répète et l'approuve (répliques 31 et 32). Cette satisfaction est avérée par Cédric avec sa dernière réplique qui répète sa conclusion : *< Donc, il y a 200 appariements possibles. >*. Ce dernier échange renvoie à une collaboration acquiesçante de la part de Yaëlle et Lucile.

L'homogénéité de cet échange résolutoire (des répliques 28 à 34) permet donc d'associer la procédure proposée par Cédric aux assertions suivantes : *< Chaque objet de la collection est apparié à chacun des autres. >* et *< On ne compte qu'un seul appariement avec 2 objets. >*

Il semblerait que ce groupe d'élèves ait établi un consensus sur la réponse au problème. Mais l'épisode suivant relance la négociation comme si cette réponse restait insatisfaisante.

#### • *L'épisode V :*

Cet épisode a pour thème une procédure particulière : l'utilisation des propriétés de la proportionnalité (cf. sous III.2.C.f, p. 80.). Il est constitué d'un seul échange relevant d'une co-construction. Cet échange commence avec la réplique 35 de Yaëlle : « 2 personnes, ça fait 1 salut. » renforcée par l'approbation de Lucile (réplique 36). Il continue avec La réplique 37 de Cédric qui continue le raisonnement : « Pour 20 personnes... ». Cette séquence est résumée par Yaëlle qui écrit :

**2 p → 1 salut**

**20 p →**

Cette représentation des données est semblable à celle que l'on utilise traditionnellement en classe pour présenter et traiter une situation de proportionnalité. D'où l'inférence de Cédric : « *C'est 10 fois plus.* ».

Cette co-construction intègre tout de même un mini conflit socio-cognitif concernant une erreur de rapport. Lucile semble penser que pour 20 objets, il y a 20 fois plus d'appariements possibles qu'avec 2 objets (réplique 39). Cédric corrige cette conception en rappelant que 20, c'est 10 fois plus que 2 (réplique 40).

Quoiqu'il en soit, l'homogénéité de l'échange qui constitue cet épisode permet d'associer le recours aux propriétés de la proportionnalité avec les mêmes assertions que la procédure partitive < 1 appariement, c'est 2 objets > ; < Il y a 20 objets à appairer > mises en relation selon l'écriture de Yaëlle ou selon le raisonnement suivi par les élèves dans cet échange.

Enfin, à la réplique 41, Yaëlle donne un résultat non cohérent avec la procédure qui thématise cet échange résolutoire : < 300 appariements possibles. > Nous ne pouvons rien en dire de plus sinon qu'elle lance l'épisode suivant.

#### • *L'épisode VI :*

L'épisode VI présente un conflit cognitif assez intense entre les élèves du groupe. Si la réplique 42 de Lucile qui demande à Yaëlle d'expliquer sa proposition de résultat est réussie (puisque un débat la suit), aucun des actes discursifs qui compose ce dernier n'est satisfait – d'autant plus que les élèves ne semblent pas s'écouter : ils ne cherchent apparemment qu'à placer leurs arguments. Il est donc difficile de le considérer comme un échange résolutoire d'autant plus que les propositions de réponse par Cédric et qui closent l'épisode sont peu cohérentes : 10x20 (réplique 50) et 20x2 (réplique 51).

Voici le contenu des assertions qui caractérisent cet épisode :

- Yaëlle : < 1 objet est apparié à 20 objets. > (répliques 44 et 46)
- Lucile : < Il n'y a qu'un objet qui est apparié à vingt objets. > (réplique 45)

Il est difficile d'interpréter ces éléments. Lucile n'a pas donné plus de détails : son explication est inachevée et elle ne tire aucune conséquence de son assertion.

Yaëlle n'a pas terminé la conclusion de son assertion (réplique 48). Cette dernière considère des appariements constitués du même objet. Enfin, Cédric n'argumente pas ses propositions de réponse (il rejette même sa dernière à la réplique 54 de l'épisode VII contre Lucile qui l'a reprise à la réplique 53).

### • *L'épisode VII :*

Cet épisode est relativement complexe à analyser. Il est thématisé par cette forme de procédure  $n*(n-1)$  qui restera la dernière solution élaborée par le groupe d'élèves. Nous pouvons tout de suite remarquer que les acquis de l'épisode IV (le caractère non ordonné des appariements) ne sont pas intégrés dans cette réponse. La procédure qui restera relève ainsi d'une réponse intermédiaire supérieure puisque, si elle organise bien une activité combinatoire, les appariements qu'elle dénombre sont ordonnés.

Le découpage de cet épisode en échanges est difficile puisqu'il est caractérisé par un important conflit socio-cognitif dans lequel il est difficile d'observer des satisfactions d'actes discursifs<sup>28</sup>. Cependant, rappelons que nous recherchons des homogénéités entre des répliques des séquences afin de pouvoir associer telle ou telle assertions avec les procédures qui font l'objet de la négociation. Pour rendre cette analyse possible, nous travaillons à présent non seulement en terme « d'échange » mais aussi, de façon plus générale, de « séquence » si l'homogénéité n'est pas assurée du fait de la satisfaction de certaines conduites interactives. Cependant, comme nous allons le voir, dans la mesure où une procédure s'impose en fin d'épisode et qu'elle en satisfait certains actes discursifs majeurs (opposition à une procédure concurrente : procédure  $n*(n-1)$  contre procédure partitive, assertions dont le contenu concerne certaines propriétés de la situation : *< 1 objet est apparié à n-1 objets. >*), nous pouvons le caractériser comme un échange résolutoire homogène selon le schéma que nous avons défini ci-dessus : assertion / procédure (cf. aussi page 166 où nous avons présenté une analyse de cette séquence). Voyons à présent tout cela.

---

<sup>28</sup> Rappelons que nous appelons séquence une succession déterminée de tours de paroles au cours de la négociation.

La première séquence commence par une assertion dont le contenu est nouveau : *< 1 objet est apparié à  $n-1$  objets. >* (Yaëlle, réplique 52). Lucile rejette la donnée  $n-1$  avec sa réplique 55 : *< Il y a  $n$  objets. >* Yaëlle semble alors lui expliquer, avec la réplique 56, que la personne qui serre la main aux autres est comprise dans la collection des 20 personnes. Cet argument n'est pas retenu par Lucile qui se réfère à l'énoncé du problème pour l'invalidier : *< Il n'y a pas marqué : « Elle comprise. » dans l'énoncé. >* (réplique 57). Enfin, Cédric renforce l'assertion initiale de Yaëlle en la répétant et conclue en proposant la procédure correspondant :  $n*(n-1)$  (réplique 58). A partir du moment où nous avons la satisfaction d'acte discursif (Cédric intègre cette propriété de la situation dans le traitement qu'il lui applique), nous pensons que nous avons ici une séquence homogène, donc un échange. Ce dernier, du fait de son homogénéité, nous permet donc d'associer la procédure  $n*(n-1)$  à l'assertion dont le contenu est *< 1 objet est apparié à  $n-1$  objets. >*

La deuxième séquence de l'épisode commence par l'opposition de Lucile contre cette solution (réplique 59). Elle rejette une fois de plus la donnée  $n-1$  puisque, selon elle, cette dernière n'est pas écrite dans l'énoncé du problème (réplique 62). Cédric et Yaëlle lui explique alors qu'un objet de la collection peut s'apparier avec les  $n-1$  autres (répliques 65 à 67) et qu'elle ne s'apparie pas avec elle-même (réplique 68).

Dans cette séquence, Lucile semble ne pas distinguer entre « effectif de la collection » et « nombre d'appariements possible pour chaque objet ». De toute évidence, sa représentation du problème – celle qui s'associe à une procédure partitive – résiste à toute remise en cause, à toute transformation.

Une troisième séquence commence alors avec une question de Lucile. Elle se demande si les autres objets ne s'apparient pas comme le premier (réplique 69). Cet acte discursif est réussi et satisfait puisque Cédric lui répond que c'est justement pour ça qu'il faut multiplier le nombre d'appariements pour un objet par le nombre d'objets (répliques 70). A ce moment, le conflit cognitif cesse un moment puisque Lucile semble accepter l'idée de Cédric (réplique 71).

La séquence qui suit cet échange (répliques 71 à 73) est de nouveau satisfait : Lucile demande le résultat de l'opération  $19 \times 20$ , résultat qui est calculé par Cédric et qu'elle relève à la fin et valide par un « Ok ? » (réplique 73). Ce nouvel échange vient

satisfaire toute l'argumentation déployée par Cédric et Yaëlle au cours de ce conflit socio-cognitif. Le contenu de l'assertions qui correspond à cet argumentation (< *Chacun des  $n$  objets est apparié  $n-1$  fois*>) semble reconnu (peut-être pas intégré) par Lucile qui prend l'initiative de passer à la phase de justification de l'épreuve en évoquant les explications à porter sur la feuille de réponse dans sa réplique 73.

La cinquième séquence de cet épisode reprend le conflit socio-cognitif du troisième échange. Elle commence avec la réplique 74 de Lucile qui doute de la réponse trouvée (la procédure  $n*n-1$ ). Elle se termine à la réplique 91 où Lucile lève son doute à la suite de la négociation contenue dans cette séquence puisque la séquence suivante a pour thème la rédaction de la justification sur la feuille de réponse.

Lucile profite du doute de Lucile sur la solution pour relancer le débat : « *Je suis sûre qu'il y a de la division là dedans.* » (réplique 77). Cette réplique montre que Lucile n'a pas intégré les significations portant sur la situation qu'on explicitées Yaëlle et Cédric et que l'on peut résumer par l'assertion suivante : < *Chaque objet est apparié à chacun des autres.*> On retrouve la prégnance d'une interprétation de la situation comme étant une partition puisqu'elle exprime bien la nécessité d'avoir recours à la division pour résoudre le problème.

Les répliques 80 et 81 montrent encore que Lucile fonctionne sur des significations radicalement différentes portées sur la situation. Dans l'optique de lui expliquer la donnée  $n-1$ , Yaëlle lui explique que l'exemple porte sur le cas d'un objet qui s'apparie à tous les autres (réplique 80). Lucile refuse cette idée et ramène le débat au niveau des 2 objets qui constituent un appariement. Elle argumente son propos en soulignant dans l'énoncé du problème le fait qu'il faut dénombrer les appariements ENTRE les 20 objets de la collection – ce qu'elle traduit parfaitement par l'idée que les personnes vont tous se serrer la main (réplique 83).

Mais cela ne lui permet toujours pas de comprendre la donnée  $n-1$  (réplique 85). Cédric lui explique alors qu'un objet ne s'apparie pas à lui-même (répliques 88 et 90) ce que Lucile approuve (réplique 89). L'homogénéité de l'échange (répliques 85 à 91) permet d'associer la donnée  $n-1$  inférée à l'assertion : < *Un objet ne s'apparie pas à lui-même.* >

• **Les épisodes VIII et IX :**

L'épisode VIII a pour thème la rédaction de la justification à la réponse retenue par le groupe. Il est suivi d'un nouveau conflit cognitif qui va constituer le dernier épisode de négociation de ce groupe d'élèves.

L'épisode IX est l'objet d'un nouveau conflit socio-cognitif entre, d'une part Lucile et, d'autre part, Cédric et Yaëlle. Nous ne le détaillons pas pour deux raisons. D'abord, parce qu'on n'y apprend rien de plus sur les significations respectives portées sur la situation. Ensuite parce qu'il culmine par une explication sous forme de schéma et que nous avons déjà présenté ce passage précédemment (Cf. page 152).

**c. Proposition de modélisation pour l'ensemble des réponses relatives à ce protocole**

Rappelons que l'objectif de cette partie consiste à présenter une méthodologie d'analyse des interactions entre les élèves qui élaborent collectivement une solution au problème posé. Nous cherchons ainsi à saisir les significations qu'ils portent sur la situation et qui s'associent aux réponses spécifiques élaborées au cours de leur collaboration.

Ces interprétations de l'énoncé, plus ou moins partagées par les élèves, sont construites au cours de leurs interactions. Pour cela, nous centrons notre observation sur certains moments spécifiques de la négociation que nous définissons en terme « d'échanges résolutaires ». Que ce soit des moments de conflits socio-cognitifs ou des moments de co-constructions, ces séquences sont homogènes dans la mesure où elles répondent aux propriétés de réussite et de satisfaction qui peuvent caractériser les conduites interactives. D'autre part, elles se composent d'assertions dont le contenu est relatif à certaines propriétés retenues de la situation ainsi que de procédures pour traiter ces dernières. Enfin, c'est le caractère homogène des échanges résolutaires qui permet d'associer certaines assertions spécifiques à certaines procédures particulières.

Ainsi, le premier échange résolatoire que nous avons pu observer dans le protocole 01 renvoie à la mise en œuvre de la procédure partitive  $n/2$ . Il a été vite abandonné par Yaëlle et Cédric mais défendu jusqu'à la fin par Lucile. Les contenus des assertions qui lui correspondent sont les suivantes : *< 1 appariement, c'est n objet et il y a n objets*

à appairer.  $>$ ,  $<$  2 objets font 1 appariement, pas 2.  $>$ . Rappelons la difficulté éprouvée par Lucile à abandonner ce type de représentation du problème qui considère à la fois un tout (les  $n$  objets) et une partie du tout (l'appariement constitué de 2 objets interprété alors comme une partition de l'ensemble). Cette difficulté l'a rendue incapable d'intégrer la donnée inférée  $n-1$  que la prégnance de cette représentation a rendu impossible. Aucun des conflits socio-cognitifs qui ont jalonné le cours de la négociation n'a réussi à déstabiliser cette dernière. Il est possible que l'on retrouve ici un problème lié à l'incapacité d'introduire de la durée dans la représentation de la situation. Nous avons déjà analysé ce problème lié à la procédure partitive pour d'autres modèles combinatoires implicites (cf. sous III.5.C, p. 123). Pour que le randonneur A salue le randonneur B, puis le randonneur C, puis un randonneur D, etc. il faut introduire dans sa représentation un moment  $t_1$  (appariement AB), suivi d'un moment  $t_2$  (appariement AC), suivi d'un moment  $t_3$  (appariement AD) etc. Nous nous retrouvons alors avec une procédure qui rappelle « l'énumération partitive répétée jusqu'à épuisement des possibles ». Cette forme de réponse a été relevée au cours de l'expérience « Devoir sur table » (cf. sous III.2.A.a, p. 63.).

Très proche de ces significations (elles portent sur les mêmes assertions), nous observons le recours non pertinent aux propriétés de la proportionnalité. Ce mode de réponse, proche de la procédure partitive (elles relèvent du même champ conceptuel) semble lié à la manière d'organiser et de présenter les données du problème sous forme de tableau et non sous forme de tout et de partition du tout), comme pour un produit croisé :

**2 objets  $\rightarrow$  1 appariement**

**$n$  objets  $\rightarrow$  ... appariements**

Il est difficile de dire si c'est l'habitude scolaire de cette présentation des données qui a présentement induit le recours aux propriétés de la proportionnalité ou si c'est la prégnance non consciente du schème de la proportionnalité qui s'est activé de façon opportuniste à ce moment-là et a accompagné à la fois l'organisation des données et le raisonnement réalisé dans l'échange. La réponse est certainement dans l'interaction de ces deux processus. Rien dans cette analyse ne nous permet de conclure sur ce point.

Le deuxième ensemble de significations qui s'est déterminé au cours de la négociation renvoie à la mise en œuvre de différentes formes de procédures « corrigées » comme  $n*n/2$  ou non corrigées comme  $n*n$  et  $n*n-1$  (Cf. sous III.2.A.a, p. 59). Rappelons le contenu de l'assertions de Lucile (réplique 12) qui a introduit cette nouvelle réponse au début de l'épisode II : *< Chaque objet est apparié à chacun des autres. >*. Cette interprétation de l'énoncé réagit contre la précédente : *< Il n'y a pas 1 objet apparié à 1 objet, il y a n objets appariés à n objets. >* Un objet apparié à un objet correspond à une représentation partitive de la situation qui juxtapose des groupes de 2 objets comme dans l'énumération partitive (cf. page 83). En contre partie,  $n$  objets appariés à  $n$  objets détermine une conduite coordinatrice qui renvoie à l'activité combinatoire telle que nous l'avons définie (cf. page 41).

L'abandon de la procédure  $n*n$  pour la procédure  $n*n-1$  s'accompagne des assertions suivantes : *< 1 objet ne s'apparie pas avec lui-même. >* et *< 1 objet s'apparie à  $n-1$  objets. >* ou *< Chacun des  $n$  objets est apparié aux  $n-1$  autres. >*.

Le passage d'une procédure  $n*n-1$  à une procédure corrigée  $(n*n-1)/2$  semble associée à l'assertion suivante : *< 2 objets font 1 appariement, pas 2. >* Cédric avait alors compris (épisode III, réplique 23 puis épisode IV, réplique 31) que les appariements ne sont pas ordonnés. Rappelons que Lucile avait interprété cette assertion dans le sens d'un renforcement de sa représentation du problème en terme de « tout » et de « partition du tout » (épisode III, réplique 27).

N'oublions pas qu'au cours de la négociation et particulièrement dans les conflits socio-cognitifs, les assertions ont non seulement justifié les propositions de réponses mais ont aussi cherché à déstabiliser les significations qui accompagnent les procédures concurrentes. La Figure 4 rend compte du modèle résolutoire relatif aux relations de justification et de réfutation entre les procédures observées dans le protocole 01 et les assertions recueillies. Ce modèle est bien sûr incomplet parce qu'il n'intègre pas les caractéristiques sémantiques de la situation traitée. Ce point fait l'objet de la dernière partie de ce travail.

Pour en faciliter la lecture, les procédures, écrites en gras, sont centrées sur la largeur de la feuille le long d'une place hachurée. Elles sont reliées aux assertions par des flèches (en cas de justification) ou des lignes pointillées terminées par des points (en



cas de réfutation). Pour distinguer les deux ensembles de signification en concurrence, nous avons mis dans les différentes vignettes ce qui concerne un traitement partitif de la situation sur fond blanc cerné de gris et ce qui relève d'une activité combinatoire sur fond gris entouré de blanc. L'assertion commune aux deux ensembles de signification est sur fond gris, cerné de gris. Les numéros entre parenthèse renvoient aux répliques du protocole. Nous avons mis entre guillemets et en italique les énoncés des élèves que nous n'avons pu décontextualiser, parce que très ancrés dans la sémantique de l'énoncé.

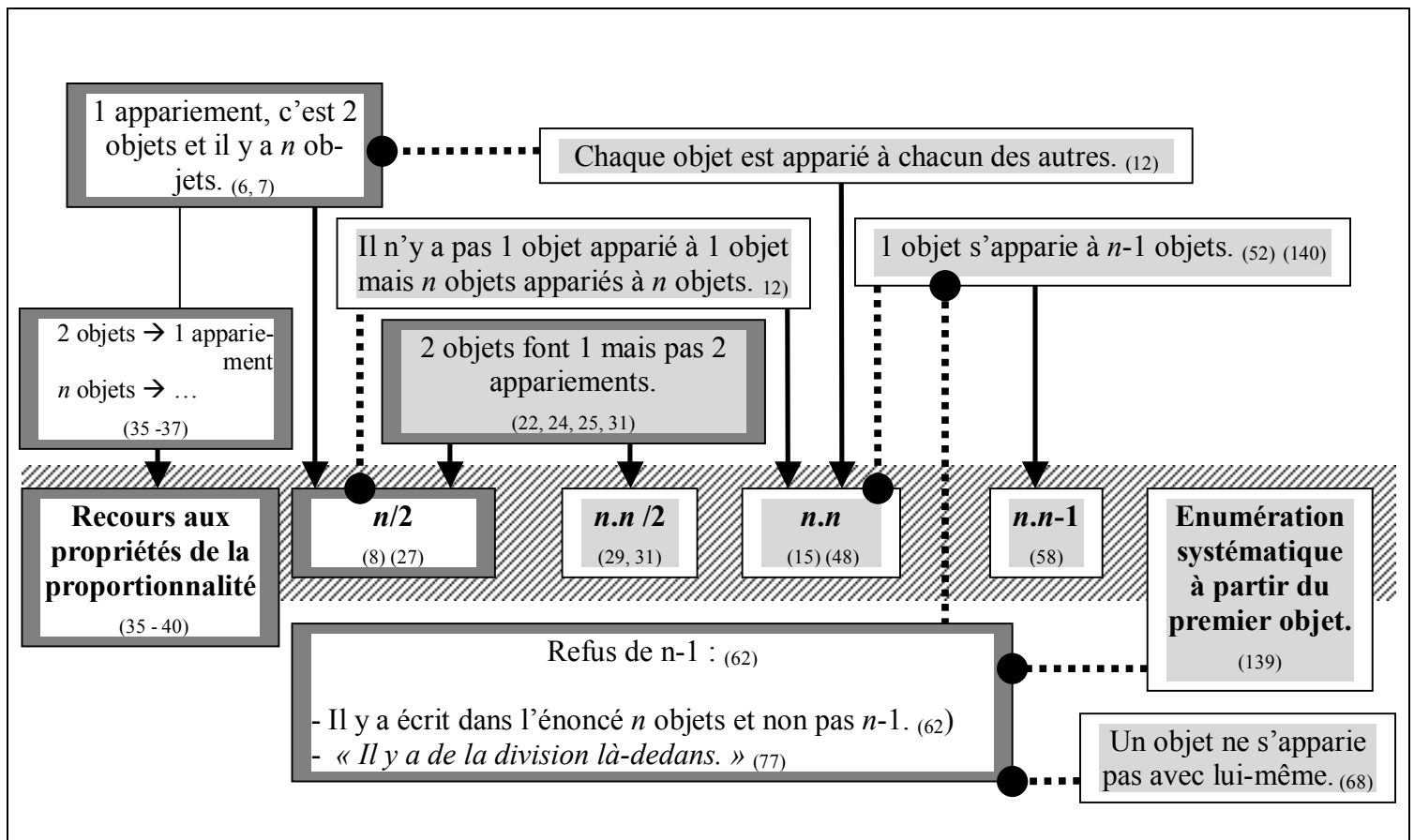


Figure 4 : Schématisation des modèles de résolution relatifs au protocole 01 (Association – salutations).

## V. Présentation des résultats de l'expérience « Atelier de résolution de problème »

Le travail d'analyse présenté pour le protocole 01 s'applique à tous les groupes d'élèves de l'expérience « Atelier de résolution de problème ». Il serait fastidieux d'exposer ici, et de cette même façon, l'ensemble du corpus recueilli. Par conséquent, nous présentons seulement en annexes (cf. p. 285) les modélisations des échanges éso-lutoires relatifs à chacun des protocoles. Ces schématisations sont, bien sûr, issues d'analyses méthodologiquement identiques menées en terme d'échanges résolutives. Chaque groupe présente un schéma propre, plus ou moins complexe selon le nombre de solutions qui ont émergées et de conflits qui ont animé le cours de la négociation.

D'autre part, il serait tout aussi laborieux de détailler et de commenter, un par un, tous les protocoles ainsi décrits. On s'aperçoit rapidement qu'ils présentent chacun des aspects différents et contingents d'une structure pour ainsi dire unique. Il nous a paru plus intéressant de présenter une synthèse générale qui rende compte des principales régularités observées au niveau des différentes significations relevées et des conflits qu'ils entretiennent entre elles.

L'objectif qui se dessine à présent consiste donc à proposer pour ces types de problèmes des modèles de résolution qui puissent rendre compte des différentes réponses produites au cours des deux expériences. Il s'agit enfin et surtout d'appréhender certains effets liés aux caractéristiques des modèles combinatoires implicites et des collections en jeu sur l'élaboration de la réponse. Ce point réintroduit dans la description des modèles résolutives en jeu le facteur lié aux propriétés sémantiques de la situation. Il fera l'objet de la dernière section de cette partie.

### 1. Significations et modèles de réponse

Le tableau suivant (page 209) présente l'ensemble des assertions observées accompagnées du type de lien qu'elles entretiennent avec les différentes procédures selon qu'elles ont une fonction soit de justification ou de conclusion (représentée par les points), soit de réfutation (signifiée par les croix). Les nombres entre parenthèses qui

accompagnent chaque proposition renvoient au protocole où on peut localiser cette dernière. Nous avons ordonné les lignes et les colonnes afin de regrouper les assertions relativement à chaque procédure. Le groupement de plusieurs assertions conjointement liées à une procédure particulière permet de déterminer un ensemble de significations portées sur la situation<sup>29</sup>.

A une exception près, tout en bas du tableau, ce dernier montre bien que les procédures pertinentes et les procédures non pertinentes ne possèdent pas d'assertions communes. Chacun des ensembles de significations portées sur la situation semble donc être spécifique. L'exception concerne la proposition : « 2 objets ne font pas 2 mais 1 seul appariement. » Cette assertion est compatible avec presque toutes les procédures mises en œuvre bien que ces dernières puissent être antagonistes et incompatibles. Seules la conséquence change puisque pour les procédures pertinentes, elle invite à ne pas compter deux fois les appariements réalisés (puisque'ils sont par nature non ordonnés) et, pour les procédures fausses, elle justifie la simple partition de la collection<sup>30</sup>.

Nous pouvons donc conclure à la présence dans notre corpus de deux modèles résolutoires. Il est donc nécessaire de décrire ce panorama procédure par procédure et de caractériser ainsi ces deux modèles. Nous verrons ainsi respectivement les ensembles de signification liés aux procédures pertinentes et ceux qui s'associent aux procédures non pertinentes.

---

<sup>29</sup> Ce travail sur les données s'inspire du traitement graphique de l'information sur matrice proposé par Bertin (1977).

<sup>30</sup> Ce point a été étudié au cours de l'analyse du protocole 01. Cf. les épisodes III et IV, pp. 196-197.

**Tableau XXVIII : Ensemble des assertions associées à chaque procédure.**

(justification : ● ; réfutation : ×)

Procédures Assertions	$n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1$	$n.n-1$ et $n.n$	$(n.n-1)/2$ et $n.n/2$	Procédure partitive $n/2$	Enumération circulaire.	autres
Chaque objet est apparié à $n-1$ autres objets. (05)	●					
Le premier objet est apparié $n-1$ fois aux autres, le second objet est apparié $n-2$ fois (parce que son appariement au premier est déjà réalisé), etc. (04) (05) (07) (09) (10) (13) (15) (19) (23) (24)	●					
Le 2 <sup>ème</sup> objet a déjà été apparié au 1 <sup>er</sup> . (13) (15)	●	×				
Chaque objet est apparié à chacun des autres. (06) (15) (16) (18) (23)	●	●				
A chaque appariement, on peut changer un des 2 objets. (24)	●	●				×
Il y a d'autres appariements possibles que ceux produits par la partition de la collection. (07)	●	●		×		
Un objet ne s'apparie pas avec lui-même. (01) (14) (17) (18)	●	●	●			
Il y a des appariements redondants. (06)	●	×	●			
Chaque objet est apparié plusieurs fois. (02) (19)		●				
(Chaque objet est apparié plusieurs fois) il faut juste ne pas répéter un appariement. (02)		●				
Chaque objet est apparié ( $n$ fois) $n-1$ aux autres (et il y a $n$ objets). (01) (02) (03) (04) (07) (09) (10) (14) (16) (17) (18) (20) (24)		●				
1 objet est apparié $n-1$ (ou $n$ ) fois, $n$ objets font $n$ fois plus d'appariements. (03) (14)		●				
Le 1 <sup>er</sup> objet des 2 est apparié de $n$ façons diffè-		●				

rentes et le 2 <sup>nd</sup> aussi. (03)						
Le second objet fait aussi n-1 appariements. (15)	×	●				
Chaque objet est apparié à chacun des autres. (10) (12)		●		×		
On ne demande pas le nombre suffisant d'appariements pour que tous les objets soient appariés au moins une fois. (20)		●		×		
n objets sont appariés à n objets. (01)		●		×		
2 objets font 1 appariement, n objets font n/2 fois plus. (01) (20)				●		
Dans n, il y a x fois 2. (15)				●		
Avec cette solution, tous les objets sont appariés (au moins un e fois) même s'ils ne le sont pas avec chacun des autres. (16)				●		
n/2 objets s'apparie à n/2 objets. (17)				●		
Chaque objet n'est apparié qu'une fois. (02)		×		●		
« Il y a de la division, là-dedans ! » (01)		×		●		
n-1 n'est pas marqué dans l'énoncé. (01)		×		●		
Il faut faire des appariements différents à chaque fois. (16) (24)				●		×
1 appariement, c'est 2 objets (et il y a n objets). (01) (03) (04) (06) (12) (25)				●	●	
1 objet est apparié avec n-1 autres. (13)						●
Il faut faire des appariements de 2 objets. (16)						●
Il faut faire des appariements différents à chaque fois. (24)						●
2 objets ne font pas 2, mais 1 seul appariement. (01) (07) (08) (18)	●	×	●	●		●

### A. Significations associées aux procédures pertinentes

Rappelons que les procédures recueillies dans les protocoles de cette expérience et que nous qualifions de pertinentes sont les énumérations systématiques et les énumé-

rations corrigées. Elles sont respectivement liées aux calculs  $n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1$  et  $(n.n-1)/2$ . Nous y ajoutons les calculs suivants :  $n + n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1$ ,  $n.n$ ,  $(n.n)/2$  et  $n.n-1$ . Ces derniers sont considérés lors de l'épreuve « Devoir sur table » comme réponses intermédiaires supérieures. Il nous a paru difficile de les considérer comme strictement justes puisque les élèves intègrent alors dans leurs dénombrements des appariements ordonnés ou constitués du même objet. En contre partie, on ne peut les associer aux réponses strictement fausses comme l'énumération partitive associée au calcul  $n/2$  ou à l'énumération circulaire puisque les élèves qui appliquent ces procédures ne mettent pas en œuvre d'activité combinatoire (relevant du dénombrement de combinaisons, d'arrangements ou de permutations). Tout cela a déjà fait l'objet d'explications, en particulier dans la partie relative à l'expérience « Devoir sur table » (cf. sous III.2, p. 58.).

Les réponses justes et intermédiaires sont donc définies non seulement par des procédures particulières, mais aussi par des ensembles d'assertions, le tout constituant ce que l'on peut appeler un modèle de réponses pertinentes. Les différentes assertions associées aux procédures pertinentes peuvent être regroupées en un ensemble de significations qui renvoie bien à une activité combinatoire. En voici les contenus :

- *< Chacun des 2 objets est apparié à chacun des autres. >*
- *< Il faut compter  $n-1$  appariements pour le premier objet. >*
- *< Il ne faut plus compter que  $n-2$  appariements pour le 2<sup>nd</sup> objet parce que son appariement au 1<sup>er</sup> objet a déjà été pris en compte. >*
- *< Chaque objet est apparié  $n-1$  fois aux autres et il y a  $n$  objets à appairer. >*
- *< Chaque objet est apparié  $n-1$  fois aux autres et  $n$  objets font  $n$  fois plus d'appariements. >*

Au cours des conflits socio-cognitifs, il est possible d'observer deux types d'assertions contestant certaines réponses divergentes. D'une part, à l'intérieur même du « modèle de réponses pertinentes »<sup>31</sup>, nous avons relevé des assertions qui permettent de

---

<sup>31</sup> Ce terme est expliqué ci-dessous à la section V.1.C, p. 214.

passer d'une réponse intermédiaire supérieure à une réponse strictement juste quand les élèves les intègrent toutes les deux dans leur représentation de la situation et son traitement. Elles cherchent à souligner que les appariements sont non ordonnés ou sans répétitions :

- *< Un objet ne peut s'apparier avec lui-même. >*
- *< 2 objets font 1 et non 2 appariements. >*

La première permet de corriger la procédure  $n*n$  en procédure  $n*n-1$ . La seconde s'oppose aux calculs  $n*n$  ou  $n*n-1$  et conduit aux réponses de type  $(n*n)/2$  ou  $(n*n-1)/2$ .

D'autre part, contre les réponses fausses que donnent certains élèves, les assertions suivantes opposent des objections correspondant à des interprétations appropriées de l'énoncé compte tenu des caractéristiques de la situation à traiter :

- *< Un objet est apparié plusieurs fois. (Il suffit de ne pas répéter le même appariement.) >*
- *< On ne demande pas le nombre suffisant d'appariements pour que tous les objets soient appariés au moins une fois. >*

La première assertion s'oppose à une représentation partitionnée de la situation avec laquelle il ne paraît pas possible de concevoir qu'un objet déjà apparié puisse l'être à nouveau (comme semble le penser certains élèves de notre échantillon, nous le verrons dans la prochaine section). La seconde assertion présente une objection contre l'idée selon laquelle il suffit simplement d'apparier une fois chaque objet (même s'ils ne sont pas tous appariés ensemble) pour avoir répondu à la tâche. Cette dernière interprétation de la tâche s'associe (ou induit) alors la recherche du nombre minimum d'appariements pour que chaque objet soit apparié au moins une fois.

## **B. Significations associées aux procédures non pertinentes**

Nous cherchons, à présent, à définir ce que nous pouvons appeler un modèle de réponses non pertinentes. Cela concerne principalement les procédures partitionnées et circulaires.

Avant de poursuivre, rappelons tout de même que l'analyse du protocole 01 (cf. sous IV.3.B.b, p. 193 et suivantes) nous a permis d'observer un cas de recours aux propriétés de la proportionnalité pour résoudre le problème. Nous avons observé ce type de réponse dans l'épreuve « Devoir sur table » où elle était associée aux réponses intermédiaires inférieures. Il s'agissait dans ce cas d'élèves appliquant un coefficient au résultat du problème  $n=4$  pour trouver le résultat au problème  $n=20$ . Dans le cas du protocole 01 de l'épreuve « Atelier », lié au seul problème  $n=20$ , le recours à un coefficient semblait plutôt déterminé par (ou déterminant) la façon dont les données du problème étaient posées par les élèves. Dans ce protocole, l'assertion  $< 1$  appariement, c'est 2 objets et il y a  $n$  objets.  $>$ <sup>32</sup> est présentée de la manière suivante :

**2 objets  $\rightarrow$  1 appariement**

**$n$  objets  $\rightarrow$  ... appariements**

Cette mise en forme des données du problème ressemble beaucoup à la façon dont on présente celles qui sont liées aux situations de proportionnalité, par exemple :

**5 gâteaux  $\rightarrow$  14 €**

**$n$  gâteaux  $\rightarrow$  ... €**

Il est fort possible que certaines réponses non justifiées à l'épreuve « Devoir », en particulier dans la modalité 20-4 de l'épreuve (rappelons que, dans ce cas, l'élève commence par résoudre le problème  $n=20$ ), pourraient bien relever de ce type de traitement.

En dehors du recours inapproprié aux propriétés de la proportionnalité, les solutions fausses de l'ensemble des protocoles enregistrés sont celles qui mettent en œuvre l'énumération partitive, le calcul partitif  $n/2$  ou l'énumération circulaire. Les autres réponses fausses observées ne présentent que peu de possibilité de compréhension dans la mesure où elles ne sont suffisamment justifiées dans aucune des deux expériences. Il est donc difficile d'en rendre compte en terme de significations puisqu'elles apparaissent de façon très peu cohérentes au cours des échanges entre les élèves. L'énumération circulaire présente aussi cette caractéristique et la seule assertion qui l'accompagne est la suivante :  $< 1$  appariement, c'est 2 objets et il y a  $n$  objets.  $>$  D'autres analyses sont

---

<sup>32</sup> Cette assertion s'associe à une procédure partitive (énumération partitive, calcul  $n/2$ ) en présentant à la fois le tout et la partition du tout



donc nécessaires pour rendre compte de la présence de ce type de réponse (cf. sous V.3, p. 224 et suivantes).

Cette dernière assertion concerne aussi l'énumération partitive et le calcul partitif  $n/2$ . Mais ces procédures s'associent à un nombre plus important d'assertions dont voici les contenus :

- *< 1 appariement, c'est 2 objets et il y a  $n$  objets. >*
- *< Dans 20, il y a 10 fois 2. >*
- *< La moitié de la collection s'apparie à l'autre moitié. >*
- *< Avec cette solution, tous les objets sont appariés au moins une fois même s'ils ne sont pas tous appariés ensemble. >*

Il existe aussi quelques assertions liées aux procédures fausses et qui présentent des objections contre les réponses pertinentes. Les deux principales sont les suivantes :

- *<  $n-1$  n'est pas marqué dans l'énoncé. >*
- *< Chaque objet n'est apparié qu'une fois. >*

La première de ces deux propositions montre bien l'impossibilité pour un élève ayant proposé la réponse fausse  $n/2$  de comprendre - ou d'intégrer dans sa représentation du problème - la donnée implicite  $n-1$  correspondant au nombre d'appariements possibles que chaque objet peut réaliser. Cette objection est tout à fait en accord avec l'autre assertion liée à l'idée selon laquelle les appariements constituent  $n/2$  partitions juxtaposées de 2 objets. Nous avons déjà exposé ce point ci-dessus (cf. les objections de Lucile sous IV.3.B.b, p. 193 et suivantes).

### **C. Vers une modélisation générale**

La figure suivante (Figure 5) montre de manière synthétique (et très incomplète, mais plus de détails l'aurait rendue illisible et n'auraient apporté que peu d'informations essentielles) une modélisation générale qui intègre les deux modèles de résolution que nous venons de décrire. Elle est constituée des mêmes signes qui nous ont servis pour

schématiser les différents ensembles de réponses relatifs à chaque protocole. Ainsi, les procédures sont écrites en gras sur un fond hachuré. Elles sont reliées aux assertions par des flèches (en cas de justification) ou des lignes pointillées terminées par des points (en cas de réfutation). Pour distinguer les deux ensembles de significations en concurrence, nous avons mis sur fond blanc entouré de gris ce qui concerne un traitement partitif de la situation et sur fond gris entouré de blanc ce qui relève d'une activité combinatoire. L'assertion commune aux deux ensembles est donc sur fond gris et cernée de gris (plus foncé).

Nous retrouvons donc à ce niveau relativement général les deux modèles de résolution en concurrence que nous avons observés dans le protocole 01. La partie de gauche du schéma concerne le modèle correspondant aux réponses pertinentes liées, d'une façon générale, au dénombrement des combinaisons de 2 objets d'une collection de  $n$  objets. La partie de droite présente celui qui correspond aux réponses non pertinentes dans le sens où elles ne correspondent à aucune activité combinatoire. Dans les deux cas, par manque de données, nous n'avons pas tenu compte des réponses que nous avons classées comme « intermédiaires inférieures » ou comme « autres réponses fausses » au cours de la première expérience (cf. sous III.2.C, p. 74 et sous III.2.D.c, p. 85).

Il ne s'agit pas de paraphraser le contenu de ce schéma. Cependant, nous pouvons remarquer tout de même que seul le modèle correspondant aux réponses pertinentes présente des « corrections internes » qui améliorent les procédures. En effet, l'assertion *< Un objet ne s'apparie pas avec lui-même. >* rejette les procédures qui dénombrent des appariements constitués du même objet :  $\underline{n} + n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1$  et  $n*\underline{n}$  (en souligné, les termes faux des opérations). Dans ce dernier cas, la solution reste du niveau intermédiaire supérieure même si elle progresse en intégrant cette donnée et en devenant alors  $n*n-1$ . Elle ne relève pas encore des réponses strictement justes puisqu'elle dénombre des appariements ordonnés. C'est ce que signale l'assertion *< 2 objets font 1 et non 2 appariements >*.

Remarquons que cette assertion est commune aux deux modèles de résolution comme nous l'avons vu en détails dans l'analyse du protocole 01 (épisode III). Rappelons que dans le premier, elle permet donc de dénombrer des appariements non ordon-

nés ; dans le second, elle renforce l'idée qu'un appariement est une partition de la collection.

Pour finir, nous pouvons penser que cette absence de corrections internes au sein du modèle correspondant aux réponses non pertinentes pourrait certainement signifier que ces dernières relèvent de modes de résolution plus figés, certainement stéréotypés, mais, dans tous les cas, difficilement remis en cause par les élèves qui les élaborent. La section suivante cherche à étayer quelque peu cette idée.

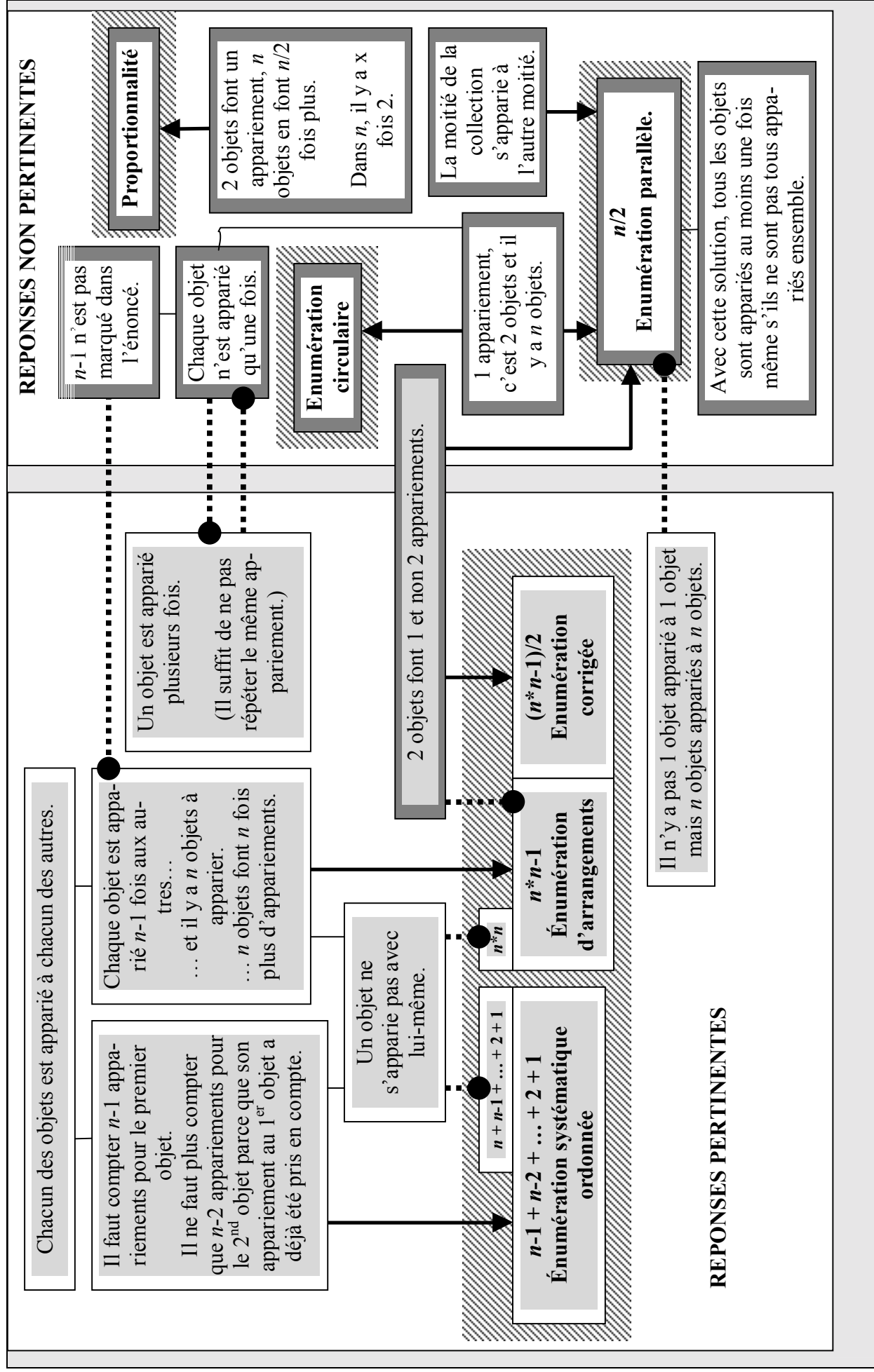


Figure 5 : Modélisation générale des réponses pertinentes et non pertinentes relatives aux problèmes posés à l'épreuve « Atelier de résolution ».

## 2. Mise en évidence d'une concurrence entre réponses pour certains élèves

La question que se pose à présent est la suivante : est-il possible que l'analyse que nous venons de présenter nous permette de comprendre, du moins en partie, ce qui ne pouvait être observé ou, en tous les cas, attesté lors de l'épreuve « Devoir sur table » ? Cette question se pose puisque l'analyse des différents protocoles de la deuxième expérience ainsi que l'observation de changements de réponses dans les travaux de certains élèves de la première expérience permettent de penser que la mise en concurrence de différentes interprétation de la situation ne se situe pas uniquement entre les élèves (en induisant des conflits dans la négociation), mais concerne certainement chaque élève en terme de conflits internes.

Même s'il semble y avoir là une clé de transfert possible, il est évident qu'il faut rester prudent quand on cherche à éclairer les données de notre première expérience à la lumière de la seconde. Cette entreprise demande de prendre un risque, celui de penser que certains élèves peuvent connaître des processus internes de négociations relatives aux significations portant sur la situation à traiter. Par conséquent, il faut accepter l'idée selon laquelle ces processus sont eux aussi des facteurs de progrès pour des raisons identiques à celles des conflits socio-cognitifs (cf. page 165). Si nous acceptons avec Vygotsky<sup>33</sup> que la pensée est (liée à) une intériorisation du langage naturel, alors rien n'empêche de concevoir que les processus de négociations, liés aux compétences socio-langagières des individus, puissent aussi être intériorisés. Nous retrouvons ce point de vue chez Wertsch (1979).

Pour approcher ces processus de concurrence entre significations au niveau intra-individuel il nous faut d'abord partir des données inter-individuelles. Ainsi, nous portons d'abord notre attention sur les différentes solutions que chacun des élèves propose au cours de sa participation à l'atelier. Les figures en annexes (page 298) montrent,

---

<sup>33</sup> Selon Vygotsky, le progrès de la pensée suit ce qu'il appelle « les lois génétiques du développement culturel ». Ce progrès se fait d'abord sur le plan inter-psychologique dans divers environnements socio-culturels, puis les processus qui permettent d'appréhender le réel, d'y agir et d'interagir avec autrui sont internalisés. C'est donc sur le plan intra-psychologique, en utilisant des instruments langagiers intériorisés, que l'individu peut penser son univers, organiser son activité, anticiper les effets de son action et la réguler.

pour chacun, les procédures qui émergent dans l'ordre où il les propose. Soulignons que ces émergences sont inscrites dans le contexte d'échanges résolutifs.

Dans un deuxième temps, à partir des tableaux précédents, nous situons chaque élève selon la manière dont évolue son travail de résolution en trois catégories :

- Progression quand un élève commence par proposer une réponse fausse (énumération partitive, calcul  $n/2$  ou énumération circulaire) et évolue du fait de sa propre réflexion ou des apports des autres pour présenter une réponse plus « pertinente » (énumération systématique, énumérations corrigées).

- Régression et instabilité dans le cas contraire ou quand les élèves n'arrivent pas à se décider pour une solution donnée.

- Stabilité quand l'élève ne présente qu'un type de réponse. Nous distinguons, bien sûr, les élèves « stables » dont les solutions proposées renvoient à des procédures pertinentes de ceux qui présentent des réponses fausses.

Ces données nous permettent de relever dans ce tableau quelques tendances spécifiques. D'abord, la plupart des élèves de l'expérience « Atelier de résolution de problème » qui commencent par une réponse fausse finissent par progresser (19 individus progressent contre 10 qui ne progressent pas). Ensuite, les réponses pertinentes sont plutôt assez stables (20 individus). Il existe quelques rares élèves qui régressent ou présentent des difficultés à choisir une réponse donnée (4 individus). Dans ce cas, nous trouvons d'abord Hazim et Zoltan du protocole 10 (problème « association – salutations ») peu sensibles aux arguments de Charlotte qui, elle, progresse. Ils n'arrivent pas à tirer les conséquences des apports de cette dernière et proposent des réponses peu cohérentes (répliques 133 et 134). Aucune réponse pertinente n'a pu se stabiliser, non plus, chez Matthieu et Laure du protocole 16 (Alexandre n'a rien proposé). Ils ont trouvé une réponse proche du calcul attendu ( $n*n-1$ , répliques 47 et 55) mais, après avoir discuté de la vraisemblance du résultat 380 ( $19*20$ ), ils se sont finalement décidés pour la réponse fausse  $n/2$  (répliques 86 et 87) qui leur semblait plus sûre.

**Tableau XXIX : Répartition des élèves selon l'évolution des réponses qu'ils proposent.**

Situations	Protocoles	Progression	Stabilité		Régression instabilités	Absence de réponses
			Procédures pertinentes	Procédures non pertinentes		
A <sub>sgm</sub>	05		Nicolas, Benjamin			Alexandre
	08		Ibtissem, Fanny			Maggy
	18	Vincent	Matthieu, Denis			
A <sub>slt</sub>	01	Cédric, Yaëlle		Lucile		
	10	Charlotte			Hazim, Zoltan	
	14		Luc	Elvys		Candice
	15		David, Thomas	Amina		
	17	Victoria, Sibyl				Lior
	23		Thomas			Alexis, Anthony
Dis	03	Anthony, Benjamin	Quentin			
	07	David, Mélody	Samuel			
	12	Jérémie, Tom, Valentin				
	22			Maéva, Emeline, Oumaïma		
Par	02	Claire, Natasha	Eve			
	09		Philippe			Andy, Alexis
	16				Matthieu, Laure	Alexandre
	20	Raphaël				Martin, Tristan
	24		Vincent, Matthieu	Denis		
Sél	04		Robine, Mathilde			Nicolas
	06	Laurène				Solenne, Alexia
	13	Raphaëlle, Sébastien	Gabriel			
	19		Gary			Mégane, Mathieu
	21			Mady		Ariane, Ghizlane
	25			Clémence, Florian		

Ces observations permettent de montrer que, sur notre échantillon, les réponses qui émergent généralement en premier relèvent principalement de procédures non pertinentes. Puis, une évolution se produit (assez souvent) dans la représentation que certains élèves se font du problème. En effet, ils infèrent ou intègrent une donnée nouvelle - implicite dans l'énoncé - à savoir le fait que chaque objet peut être apparié avec chacun des autres. Cette inférence faite, leur interprétation de l'énoncé est plus pertinente : nous savons à partir des modèles de réponses présentés ci-dessus que les élèves peuvent alors comprendre que chacun des  $n$  objet est apparié  $n-1$  fois et, éventuellement, qu'il faut éliminer les appariements redondants puisque 2 objets ne font qu'un seul appariement. Ils peuvent encore conclure que si le 1<sup>er</sup> objet est apparié  $n-1$  fois, il ne faut plus compter que  $n-2$  appariement pour le 2<sup>nd</sup> puisque son appariement au 1<sup>er</sup> est déjà réalisé, etc.

Le peu de régressions observées dans notre corpus permet de penser que les élèves qui ont tout de suite mis en œuvre une procédure pertinente présentent une très bonne résistance au conflit possible lié à la présence d'une réponse fausse.

Enfin les dix élèves qui proposent une réponse fausse résistent aux arguments présentés par les autres. Ces élèves ne semblent pouvoir assimiler l'idée selon laquelle chaque objet est apparié à chacun des autres. Et quand ils la comprennent, comme Lucie du protocole 01 (analysé ci-dessus), ils n'arrivent à en tirer les conséquences qui en découlent en matière de procédure (voir la réplique 146 de Lucile).

Nous pouvons ainsi penser qu'une réponse fausse est le plus facilement mise en œuvre par les élèves mais qu'elle est mise en concurrence par les significations liées aux modèles pertinents qui finissent souvent par dominer. Résoudre ces problèmes de dénombrement de combinaisons demanderait donc bien souvent, non seulement d'élaborer une réponse pertinente qui tienne compte des propriétés explicites et implicites de la situation, mais aussi de lutter contre toutes les interprétations concurrentes de la situation. Il semble donc difficile de « neutraliser » de la sorte une interprétation opportuniste, non pertinent, certainement rassurant (peut-être parfois fascinant), qui induit très facilement des réponses fausses. Ce contrôle de l'interprétation n'est rendu possible que si l'élève infère et accepte cette idée clé selon laquelle, dans cette situation, chaque objet peut être apparié à chacun des autres.



Cette explication n'est pas originale puisque Maury (1984) avait déjà montré l'existence chez les élèves de seconde de plusieurs modèles probabilistes spontanés dans une tâche de quantification des probabilités. Et le choix d'un modèle contre les autres dépend du contexte (du domaine de référence de la situation) évoqué dans l'énoncé du problème : des boules tirées d'un sac ou une roulette découpée en secteurs.

D'autre part, parler en terme de « concurrence » entre des significations et de « neutralisation » de procédures ne nous semble pas incongru. La recherche en psychologie cognitive montre l'existence de processus d'inhibition contre certains biais de raisonnement dans d'autres situations de traitement de l'information<sup>34</sup>. Il serait cependant peu prudent pour nous d'interpréter nos observations en terme de concurrences entre des procédures perceptives et des procédures logiques. Il faudrait montrer en quoi les procédures partitives de nos élèves relèvent d'un traitement perceptif de la situation (bien que, dans ce cas, ils ne s'en tiennent qu'aux seules données de l'énoncé sans inférer la donnée implicite  $n-1$ ). Mais, d'une façon générale, notre analyse semble converger avec l'hypothèse d'Houdé (1995) selon laquelle le fonctionnement cognitif n'est apparemment pas qu'une coordination (mathématico-)logique de données mais qu'il intègre des processus d'inhibition de certaines formes de traitement non pertinentes.

Il s'agit à présent de trouver quelques éléments dans les protocoles de la première expérience qui peuvent nous laisser penser que ces explications peuvent aussi s'y appliquer. Comme les élèves de l'épreuve « Devoir » ne disposaient pas de brouillon et qu'ils ne devaient pas faire disparaître les réponses qu'ils rejetaient (seulement les en-

---

<sup>34</sup> Evans (1989) met en évidence l'existence d'un « biais d'appariement perceptif » dans une tâche de réfutation de règles conditionnelles. Si on demande à un sujet de choisir une combinaison de deux figures qui réfute la règle : « S'il n'y a pas de carré rouge à gauche, alors il y a un cercle jaune à droite. », 9 sujets sur 10 se trompent en répondant avec un carré rouge à gauche et un cercle jaune à droite. Ils semblent piégés par la perception des objets cités dans la règle en oubliant, d'une part, que l'antécédent est une négation et que, d'autre part, on veut rendre cette règle fausse. Ils choisissent alors une réponse où l'antécédent est vrai et la conséquence fausse. La réponse juste (un carré vert à gauche et un losange bleu à droite) s'oppose aux données perceptives évoquées par la règle.

Houdé (1995, 104-123) cherche à vérifier l'hypothèse selon laquelle la réussite à cette épreuve est liée à l'inhibition d'une stratégie de raisonnement perceptif au bénéfice d'une stratégie de raisonnement logique. Il met en œuvre un apprentissage expérimental susceptible de permettre aux sujets de réaliser cette inhibition (une mise en garde pour ne pas se laisser abuser par la perception des formes et des couleurs). Cet apprentissage, qui induit une sensibilisation contre le biais d'appariement perceptif, permet alors 9 réussites sur 10.

Une observation du cerveau par tomographie par émission de position permet d'observer, chez les sujets sensibilisés contre les effets de ce biais, une reconfiguration des réseaux cérébraux de la partie postérieure (zones perceptives) vers la partie préfrontale (zone de l'émotion et de la logique). (Houdé 2000a et b)

tourer), il est donc possible d'observer quelques changements de réponses (rares, en fait) au cours de l'élaboration de la solution. Cependant, ces traces n'ont pas la prétention de couvrir l'exhaustivité des « négociations intra individuelles » des élèves de l'expérience « Devoir » puisque rien ne permet de penser qu'elles n'ont pas eu lieu pour les autres élèves, ceux qui n'ont donnés qu'une seule réponse dénuée de tous repentirs.

Sur la quinzaine de protocoles de l'expérience « Devoir sur table » qui portent la trace écrite d'un changement de réponse pour un problème donné, nous avons recensé par ordre d'importance :

- 6 stabilités en procédures pertinentes (pas de changement de significations) : protocoles 108 ( $A_{sgm}$  ; 4-20), 209 ( $A_{slt}$  ; 4-20), 313 (Par ; 40-4), 216 ( $A_{slt}$  ; 20-4), 073 (Par ; 20-4),). Le protocole 013 ( $A_{slt}$  ; 20-4) présente une réponse qui commence par une procédure de type  $n*n-1$ , passe par un calcul partitif  $n/2$  et finit par une mise en œuvre de la proportionnalité.

- 5 stabilités en procédures non pertinentes (idem) : protocole 232 ( $A_{sgm}$  ; 4-20) protocoles 312 (Par ; 4-20), 317 (Sél ; 4-20), 054 (Dis ; 20-4), 086 (Sél ; 20-4).

- 2 progressions (passage d'une réponse non pertinente à une réponse pertinente) : protocoles 307 ( $A_{sgm}$  ; 20-4) et 295 (Sél ; 20-4).

- 2 régressions (passage inverse) : protocole 022 ( $A_{sgm}$  ; 4-20) et 248 (Dis ; 4-20).

Nous pouvons tout de même constater un certain nombre de choses. La stabilité des réponses pertinentes est la classe la plus importante tandis que la régression est la moins représentée. Cette répartition est assez proche de celle que nous avons vu ci-dessus (Tableau XXIX, p. 220). Nous faisons donc l'hypothèse selon laquelle les conflits de réponses que nous avons décrits à partir des échanges entre les élèves pourraient se retrouver pour chacun des individus du groupe. Avec un certain nombre de précautions, nous pensons que ces observations autoriseraient un recours relatif aux modèles de réponses décrits ci-dessus afin d'éclairer certaines réponses laconiques de l'épreuve « Devoir sur table ». Il est évident que nous disposons d'autres indices qui nous autorisent à penser que les résultats de l'expérience « Atelier » permettent en partie d'expliquer les réponses données à l'expérience « Devoir ». Ces indices sont issus de l'analyse faite à la section suivante qui établit certains rapports, certaines régularités

entre les réponses des deux épreuves. Ce point est important dans la mesure où il fait le lien entre la première expérience centrée sur les procédures et la seconde qui concerne les processus sous-jacents dans l'activité de résolution de problème.

### **3. Modèles de réponses et effet de nature sémantique**

Les différentes analyses que nous avons pu produire jusqu'à présent n'intègrent pas encore, dans un modèle général de résolution, les facteurs sémantiques des énoncés de problèmes. Une analyse complémentaire s'impose donc.

Si les différentes interprétations possibles de l'énoncé du problème peuvent être définies en termes d'assertions et si nous pouvons les regrouper autour de procédures spécifiques en ensembles de significations portées sur la situation à traiter, nous ne savons toujours pas comment les caractéristiques sémantiques des énoncés (la nature des objets appariés et la manière dont s'effectue ces appariements – les modèles combinatoires implicites) favorisent ou freinent la mise en œuvre d'une réponse particulière contre ses concurrentes. Par exemple, il serait intéressant de déterminer ce qui, dans les différentes situations, permet (ou impose) ou empêche (ou rejette) l'inférence de la donnée implicite  $n-1$  correspondant à l'idée selon laquelle chaque objet est apparié à chacun des autres – idée essentielle qui permet, en le disant rapidement, de distinguer les réponses pertinentes des réponses fausses.

Pour cela, nous travaillons à partir d'actes discursifs dont le contenu n'a pu être traduit en termes généraux « d'objets » et « d'appariements » comme ceux que nous avons présenté ci-dessus (cf. sous V.1, p. 207). Ces actes ont pourtant participé à l'élaboration de la réponse en tant qu'assertions liées à certaines procédures dans le contexte d'échanges résolutifs (cf. sous IV.2.C, p. 169.). Parce qu'ils sont fortement ancrés dans la situation de référence, ces actes devraient donc livrer des indices importants sur les effets de contexte. Nous Les présentons ci-dessous accompagné de l'échange dans lesquels nous les avons observés.

Signalons ici que les actes discursifs constituent dans nos protocoles l'essentiel de la négociation entre les élèves. Cependant, il existe d'autres conduites interactives qui ont participé à l'élaboration de la réponse. Nous faisons ainsi référence à tout ce qui relève de la schématisation et au recours à certains outils sémiotiques de modélisation.

Ce point n'a pas fait l'objet d'une analyse spécifique. Toutefois, nous en parlons de façon occasionnelle au fur et à mesure que cela apparaît au cours de notre analyse, quand il s'agit d'éclairer un point particulier.

## A. Effet de nature sémantique et problèmes « association »

### a. Le problème « association – segments »

Les problèmes « association » génèrent peu d'assertions non généralisables. La question qui s'est posée aux élèves du protocole 18 concernant le problème des segments porte sur la représentation de ces derniers par des courbes :

8. Matthieu : Mais, si. C'est ça. Mais, si. C'est ça. Entre tous ces points, tu peux faire : tac, tac, tu peux tous les faire. Tu vois ?

*À chaque « tac », Matthieu trace des lignes courbe entre le premier point et les points suivants de la même ligne.*



9. Vincent : Mais, c'est pas tous des segments. T'es un marrant !

10. Denis : Un segment c'est droit.

11. Vincent : Oui, mais Denis, les points, ils ne sont pas forcément comme ça.

12. Matthieu : Mais, voilà. Donc, euh...

13. Denis : (...)

14. Vincent : Un segment, ça peut être tout ça.

*Vincent montre du doigt une des lignes de 10 points.*

15. Vincent : Un segment peut passer par plusieurs points.

Vincent et Denis (répliques 9 et 10) ont du mal à reconnaître comme segments les lignes tracées entre les différents points alignés du schéma (énumération systématique sur figure à partir du 1<sup>er</sup> point, par Matthieu). Or la disposition de la figure (deux

lignes de 10 points en parallèle) ne facilite pas la possibilité de tracer des segments visibles entre chacun des points de la même ligne. L'explication donnée par Vincent à Denis (réplique 15) cherche à déstabiliser son interprétation du contexte sémantique : les segments peuvent se superposer sur une ligne de points (soit trois points A, B et C alignés, il existe aussi un segment entre A et C qui passe par B).

Il est ainsi possible qu'une difficulté pour interpréter correctement l'énoncé, associée à une schématisation type (l'alignement des points) et une conception incomplète de la notion de segments puissent expliquer les nombreuses énumérations circulaires observées pour le problème « association – segments » à l'épreuve « Devoir sur table » (19,7 %, contre 0,8 % pour le problème « Association – salutations »).

Cette idée est renforcée par le fait que la seule énumération circulaire qui a été produite au cours de l'épreuve « Atelier de résolution de problème » concerne le problème « association – segments » (protocole 08). Les élèves ont répondu trois fois de suite (et définitivement) au problème par un alignement de points reliés 2 à 2 par un segment. Ces élèves ont été surpris par la simplicité apparente du problème mais n'ont pu remettre en cause leur solution. Cette modélisation traduit directement et uniquement les données de l'énoncé mais n'a pas engagé un traitement sous forme d'énumération systématique, par exemple :

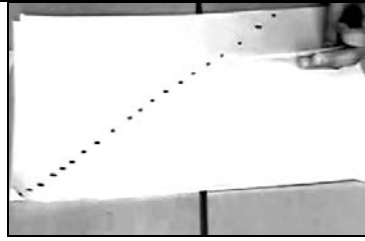
16. Fanny : « ... Combien de segments peut-on tracer en tout entre ces 20 points. »

17. Ibtesssem : Attend, attends...

18. Maggy : Vas-y.

19. Ibtesssem : 20 points. Hein ? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20...

*Ibtesssem trace une ligne de 20 points.*

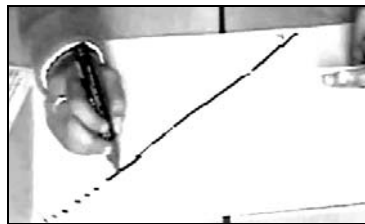


20. Ibtesssem : « On relie un point par un trait, on obtient un segment. » Donc 2 points : 1 segment.

*Ibtesssem trace un segment entre le premier et le deuxième point et écrit 1 en dessous.*

21. Ibtesssem : « Sur une feuille de papier, il y a 20 points. Combien de segments peut-on tracer en tout... » Ben, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19... 19. Et on compte le segment.

*Ibtesssem trace les autres segments en énumération circulaire.*



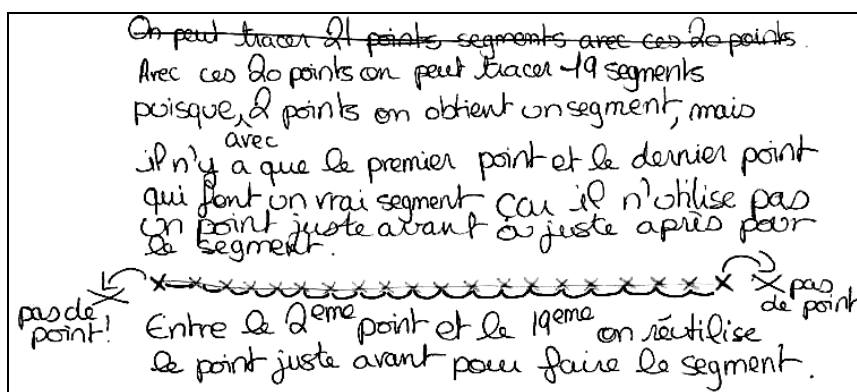
22. Fanny : (...) « ... de segments en tout... »

23. Ibtesssem : Ben, 19. Ben, c'est facile. C'est facile. Obligé. Alors, en reliant 2 points.

De toute évidence, ces élèves n'ont pas envisagé qu'il puisse exister des segments possibles entre points éloignés et qu'un segment peu franchir des points intermédiaires. Ce problème est certainement lié à une conceptualisation spécifique et incomplète la notion de segment. Il est possible qu'ils n'aient pas complètement assimilé l'idée qu'une droite est un ensemble de points alignés (bien qu'ils alignent des points sur leur schéma). Dans ce cadre, un segment de droite se définit par l'ensemble des points compris entre deux points distincts de cette droite, quels qu'ils soient. La réponse qu'ils produisent laisse penser que, pour eux, un segment est le trait droit qui relie des points distants entre eux dans une vision discontinue de l'objet « droite ». Ceci n'est pas surprenant puisque la droite est traditionnellement présentée à l'école élémentaire

comme une ligne rectiligne et illimitée et le segment comme une droite limitée par deux points (ou, dans le meilleur des cas, comme une partie de droite limitée par deux points). Il ne serait pas surprenant qu'une telle conception du segment puisse parfois non seulement induire des énumérations circulaires<sup>35</sup> mais aussi, peut-être, en faciliter son assimilation au côté d'un polygone dont les points seraient les sommets. Nous avons déjà rencontré cette question au cours de la première expérience (cf. page 65 et page 84). Ainsi, par exemple, l'élève 193 ( $A_{sgm}$ , 20-4,  $n=20$ ) écrit : « *Il y aura 20 segments car ils forment une figure fermée comme un carré [...]* ».

Voici un autre exemple pour illustrer cette signification empirique du segment. Nous attirons particulièrement l'attention sur ce passage où il écrit : « *Il n'y a que le premier point et le dernier point qui font un vrai segment car il n'utilise pas un point juste avant ou juste après pour le segment. Entre le 2<sup>ème</sup> et le 19<sup>ème</sup> on réutilise le point juste avant pour faire le segment.* » Autrement dit, d'après cette justification, le premier segment « utilise » le premier et le second point (comme il se doit) mais le troisième « réutilise » de façon non permise le second point parce qu'il n'y a que le troisième point qui lui appartient réellement. Donc, il ne serait pas considéré comme un vrai segment.



Exemple 88 : Elève 237, problème  $A_{sgm}$ , 20-4  $n=20$ .

Relativisons quelque peu ce dernier point car seules les problèmes « association – segments » et « distribution » (certainement pour d'autres raisons) présentent des énumérations circulaires complétées par une énumération systématique (4,9 % des réponses à cette situation pour le premier cas contre 3,3 % pour le second – cf. tableau II,

<sup>35</sup> La situation  $A_{sgm}$  en présente de loin le plus : 19,7 % de ses réponses comme on peut le voir dans le tableau II, p. 90.

p. 90). Ces occurrences montrent que malgré une interprétation initiale erronée et une schématisation certainement peu heuristique (comme nous l'avons vu avec le protocole 18, ci-dessus), les élèves peuvent prendre conscience du fait qu'il est possible de concevoir l'existence de segments entre tous les points que l'on peut considérer sur une droite (même si on n'en considère que 20) et agir en conséquence. Il est possible qu'à ce moment là, les segments ne sont plus identifiés aux lignes qui les énumèrent et que tracent les élèves pour les signifier et les dénombrer. Voici à nouveau l'exemple du protocole 18, quelques répliques plus tard :

38. Denis : D'abord, tu fais 2 points. Et c'est entre ces 2 points qu'il y a 20 [18 ?] points.

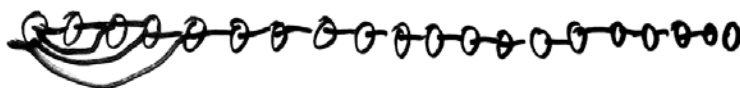
39. ( ? ) : Ah, oui ! Donc, en fait...

*Denis fait 2 points écartés. Puis il place, entre ces 2 points, 18 points en ligne. Enfin, il relie chaque point à son voisin en énumération circulaire.*

40. Denis : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

*Puis il commence une énumération systématique à partir du premier point.*

41. Denis : Et, tu fais 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8...



42. Vincent : Mais où t'as vu que c'était entre deux points... ?

*Denis continue à relier en énumération systématique à partir du premier point.*

43. Denis : Regarde, regarde. Là, il y en a 19. Après, il y a lui et lui. Il y a lui et lui, lui et lui...

Denis, qui a compris que les segments peuvent se superposer (réplique 15 de Vincent, cf. ci-dessus, p. 225), commence son schéma avec une énumération circulaire. Puis il montre à son interlocuteur, par des lignes courbes, les possibilités de segments entre points éloignés. Ces courbes sont plus visibles qu'une superposition de traits droits. Ainsi, il semblerait que Denis ait réalisé une conceptualisation plus juste de la notion de segment alors définie comme un ensemble de points entre deux points d'une droite. Quand il passe de l'énumération circulaire à l'énumération systématique, il ne



fait qu'ajuster sa réponse à cette évolution importante des significations qu'il porte à la situation. Il faut encore souligner que l'organisation de cette dernière ne semble pas, non plus, propice à la mise en oeuvre d'une énumération systématique. Par conséquent, il est possible de penser que l'énumération circulaire complétée d'une énumération systématique puisse résulter d'une évolution des significations portées sur la situation et qui s'associent au traitement de cette dernière. Cette évolution correspond à une rupture au cours de laquelle l'élève passe de réponses non pertinentes à des réponses pertinentes en réajustant l'organisation de son action.

Nous pouvons certainement trouver dans le premier extrait du protocole 18 (page 225) l'indice d'une autre évolution des significations portées sur la situation. Remarquons la disposition peu pratique des points pour procéder à une énumération systématique : les élèves placent ces points comme s'ils voulaient initialement procéder à une énumération partitive alors qu'ils réalisent finalement une énumération systématique. Nous avons observé ce type de réponse plusieurs fois dans le corpus des deux épreuves.

Ce phénomène d'évolution tangible des réponses n'est pas surprenant car, comme nous l'avons vu ci-dessus (cf. sous V.2, p. 218), le modèle associé aux réponses non pertinent semble souvent spontanément apparaître en premier alors que celui qui est lié aux réponses justes doit assez souvent s'imposer contre lui.

### **b. Le problème « association – salutations »**

La manière dont l'effet relatif au contexte sémantique intervient dans les problèmes « association – salutations » semble être un facteur de réponse intermédiaire supérieure en induisant plus de réponses en terme d'arrangements que dans le cas précédent. L'appariements, comme unité à dénombrer, est défini par la poignée de main entre deux personnes or l'interprétation de cette notion de poignée de main ne semble pas évidente du point de vue de certains élèves : ils considèrent qu'entre deux personnes qui se saluent, il y a deux saluts. Dans le protocole 01, la question qui se pose aux élèves à l'épisode III (cf. page 196), concerne le nombre de salutations à considérer (donc à dénombrer) quand deux personnes se saluent (réplique 21). Autrement dit, une salutation est constituée de 2 saluts : celui de A à B et inversement, celui que B rend à A.

Cette confusion entre la poignée de mains (l'appariement à prendre en compte pour le dénombrement) et le salut comme action intentionnelle de chacune des deux personnes se disant bonjour pourrait expliquer les 31,2 % d'énumérations d'arrangements et de calculs  $n \times n-1$  qui dominent ainsi à l'épreuve « Devoir sur table » pour le problème « Association - salutations ». Le problème « Association – segments », avec lequel il n'y a pas cette ambiguïté, n'en présente que 5,6 % : l'appariement, c'est bien le segment et cet objet n'est ni ordonné, ni orienté. Nous avons déjà étudié ce problème quand nous l'avons rencontré au cours de l'analyse de l'épisode III du protocole 01.

Il est donc possible d'observer comment l'effet lié à la sémantique des objets agit de façon différente sur les deux modalités du problème « association ». Malgré cela, ces dernières ne se distinguent pas significativement au niveau des performances à l'épreuve « Devoir sur table » (cf. 113). Il semblerait donc que le fait d'apparier les objets au sein même d'une collection (qui caractérise le modèle combinatoire implicite association) permet assez facilement de comprendre que chaque objet peut être associé à chacun des autres.

## **B. Effet de nature sémantique et problème « distribution »**

Nous avons ainsi trouvé, dans les protocoles liés à la situation de distribution, un certain nombre d'éléments intéressants relatifs aux effets de nature sémantique sur l'élaboration de la réponse. Il s'agit d'abord de l'influence de la figure et, ensuite, des problèmes liés à la mise en œuvre des règles de la somme et du produit dans le dénombrement des appariements possibles.

### **a. L'influence de la représentation figurale de la grille**

Bien souvent, les élèves commencent par dessiner une grille de 20 cases et les deux jetons dans deux cases voisines. Or ce type de représentation qui exhibe à la fois le tout (la grille) et la partie (les deux cases sélectionnées par les jetons) semble induire facilement une énumération partitive (cette réponse domine pour la situation Dis à l'épreuve « Devoir » : 39,3 %). Nous retrouvons dans l'exemple suivant une traduction directe, terme à terme, des données de l'énoncé. Cette modélisation peut être qualifiée de simpliste et ne présente aucune élaboration réelle de la solution. Les élèves ne sem-

blent pas entrer dans le problème : ils se contentent de transcrire par une figure les données du problème sans réaliser l'implicite du problème selon lequel chaque objet est apparié à tous les autres. Voici respectivement les protocoles 03 et 07 comme exemples.

1. Benjamin : Un jeton sur chaque case ?

2. Anthony : « Placement », c'est deux jetons dans deux cases différentes.

3. Benjamin : Oui, oui.

4. Anthony : On va dessiner une grille.

5. Benjamin : Oui... Donc un jeton...

*Benjamin dessine la grille et deux jetons.*

6. Anthony : Donc, ça, c'est un placement.

*Antony montre les deux jetons. Benjamin relie les deux jetons par une courbe et écrit au dessus : « placement ».*

7. Anthony : Donc, si on en place encore deux, il y a un deuxième placement ; si on en place encore deux, il y a un autre placement...

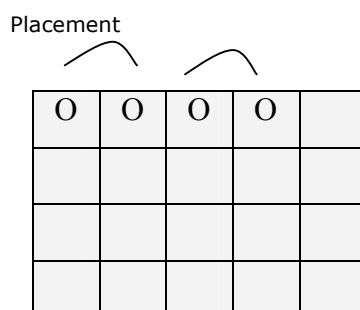
8. Benjamin : Oui.

9. Anthony : Mets des traits chaque fois qu'on fait un placement.

10. Benjamin : Comme ça ?

11. Anthony : tu fais comme ça : un placement,... deux placements,...

*Anthony trace un trait sur la feuille chaque fois qu'il dénombre un placement sur la figure.*



12. Benjamin : Il faut mettre les jetons comme ça on n'en oublie pas. On va faire le quatrième ici...

Placement

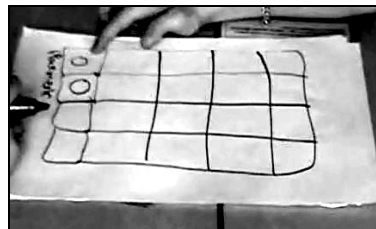
O	O	O	O	O
O	O	O	O	O
O	O	O	O	O
O	O	O	O	O

13. Benjamin : C'est bon, c'est bon... le cinquième là, le sixième, le septième... ça fait bien dix, donc...

*Mélody dessine deux jetons qu'elle entoure de deux cases conjointes. Elle écrit « placement » en dessous. Puis, elle agrandit la grille pour faire 20 cases.*

4. Samuel : Regarde, c'est possible d'en faire là, ce jeton et ce jeton. Ce jeton et ce jeton... Il y a beaucoup de placements.

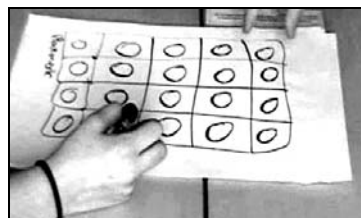
*Samuel montre avec ses doigts une énumération systématique des appariements possibles sur la rangée du premier placement dessiné puis avec d'autres cases dans la grille.*



5. Mélody : Oui.

*Malgré la remarque de Samuel, Mélody dessine un jeton dans chaque case de la grille.*

6. David : Ils disent 2 jetons dans 2 cases, ça fait 1 placement... Il suffit de compter. Ça fait 10.



Nous retrouvons aussi dans le corpus de la première expérience ce type de représentation qui s'associe à une procédure partitive, en particulier les élèves 052, 176, 309, 311 et 046. Remarquons que les deux premiers représentent la partie du tout par deux jetons placés dans deux cases non voisines. Il est possible que pour eux, ce soit l'interprétation de la situation qui détermine la figure tracée. L'élève 052 semble l'utiliser comme support du dénombrement (il remplit la grille de jetons qu'il associe 2 à 2 par une couleur identique) alors qu'elle paraît plutôt être une simple illustration pour l'élève 176 qui résout le problème autrement que par un dénombrement.

Avec de telles significations portées sur la situation, il est difficile de comprendre l'idée selon laquelle un jeton peut servir plusieurs fois pour des placements différents. Voici ce que dit David (protocole 07, réplique 16) : « *Comme on prend une grille de 20 cases... Il faut faire en même temps 20 placements, tu ne peux pas utiliser un jeton 19 fois.* »

Une telle représentation du problème peut faire penser aux élèves qu'il n'y a pas 2 mais 20 jetons disponibles pour constituer un placement. Voici, pour illustrer cette erreur la réplique 21 de Oumaïma (protocole 22) :

19. Maéva : Ah, ben oui. Ah, ben oui... sur seulement 2 cases. En fait, on ne demande pas combien il y a de jetons sur toutes les cases. On dit seulement qu'il y a 2 jetons sur 2 cases. Donc, en fait, ce qu'ils demandent, c'est combien il y a de trucs possibles. Donc, là, déjà, ça fait 1. Après, 2. Après, 3. Après, 4. Après, 5. Après, 6. Après, 7. Après, 8. Après, 9 et 10.

*Maéva fait une énumération partitive avec les doigts sur la grille.*

20. Emeline : Donc, en fait, il faut diviser 20 par 2.

21. Oumaïma : En fait, c'est comme si tu mettais un jeton par case.

Avec cette idée de 20 jetons disponibles, certains élèves peuvent occulter la signification du placement comme constitué de 2 jetons et dénombrer autant de placements qu'il peut poser de jeton sur la grille. C'est certainement ce que fait Tom du protocole 12 :

7. Tom : On pose 2 jetons sur 2 cases...

8. Jérémie : N'importe laquelle, je crois.
9. Tom : Ça veut dire qu'on pose un sur chaque case ou qu'on pose deux sur chaque case ?
10. Valentin : Non, un sur chaque case.
11. Tom : « En posant 2 jetons sur 2 cases d'une grille... »
12. Jérémie : C'est : on posant 2 jetons... Si on pose 2 jetons sur une case d'une grille, on va en poser 4 sur...
13. Valentin : Non. C'est clair. « En posant 2 jetons sur 2 cases d'une grille », ça veut dire un jeton sur chaque case.
14. Tom : Ça veut dire que le résultat, c'est 20. C'est bon...

L'assertion de Valentin : *< Poser 2 jetons sur 2 cases de la grille signifie poser 1 jeton sur chaque case. >* (réplique 13) semble inciter Tom à conclure qu'il y a donc autant de placement possibles que de cases qui peuvent recevoir un jeton.

Nous trouvons dans les protocoles de l'épreuve « Devoir sur table » quelques réponses au problème Dis qui pourraient être expliqués de cette manière. Cependant en dehors d'un résultat identique (la réponse donnée est 20) rien ne permet d'affirmer que cela relève bien des mêmes causes, voire que ces réponses ont une origine identique. Voici ces réponses :

- L'élève 049 (20-4) pense qu'il y a 20 placements possibles car  $1 \times 20 = 20$ .
- L'élève 261 (20-4) écrit qu'on peut faire 20 placements possibles en comptant le 1<sup>er</sup> placement.
- L'élève 310 (20-4) affirme que sur cette grille de 20 cases, on peut faire 20 placements car on les place par 2.
- L'élève 257 (20-4) ne donne pas de justification mais trouve le même résultat (20).
- L'élève 130 (20-4) justifie sa réponse de la manière suivante : « 18 placements car la grille comprend 20 cases et qu'il y a dessus 2 jetons, donc il reste 18 placements possibles différents. »

- L'élève 260 (20-4) a fait le même raisonnement mais en plaçant deux jetons par case : « *On fait 40 placements puisqu'on place 2 jetons dans chaque case et qu'il y a 20 cases.* »

- Il est possible que l'élève 123 (4-20) ait suivi le même raisonnement car il donne le même résultat (18)

Nous ne retrouvons pas dans les autres situations autant de fois ce type de réponse. Nous avons éventuellement l'élève 166 (A<sub>slt</sub>, 20-4) qui affirme que 20 saluts sont échangés car chaque personne serre la main à chaque autre personne. Il est possible que ces réponses proviennent d'une ambiguïté de l'énoncé concernant la définition de ce qu'il faut dénombrer.

### **b. Règle de la somme ou règle du produit**

Une solution semble spécifique au problème « distribution » pour laquelle on peut placer l'un après l'autre les deux jetons sur la grille pour effectuer un placement, donc un appariement de 2 cases. Cette solution, bien que rare, semble suivre le raisonnement suivant : il y a  $n$  façons de poser le premier jeton sur une des  $n$  cases de la grille et  $n-1$  (ou  $n$ ) façons de poser le second. Il y a alors  $n*n-1$  (ou  $n*n$ ) façons de poser le premier et le second jeton pour faire un placement. Voici un passage du protocole 03 qui pourrait illustrer cette réponse :

39. Quentin : Il faut faire vingt fois vingt.

40. Benjamin : Vingt fois vingt ?

41. Quentin : Parce qu'on peut faire vingt placements avec un jeton et il y a un deuxième jeton...

42. Anthony : Un placement, c'est avec deux jetons. On utilise deux jetons pour faire un placement.

43. Quentin : Avec deux jetons, on aurait pu faire vingt fois plus de placements.

Dans cet échange résolutoire, Quentin propose une solution liée à la procédure  $n*n$  et la justifie avec les assertions suivantes : < *On peut faire  $n$  placements avec 1 jeton* > (41a) ; < *Il y a un deuxième jetons* > (41b) ; < *Avec 2 jetons, on peut faire  $n$  fois plus de placements.* > (43).

Cette réponse pourrait être liée à l'application spontanée de la règle du produit (cf. sous II.3.A, p. 39) quand les élèves interprètent le placement comme le fait chronologique de poser d'abord le premier jeton puis le second. Dans l'extrait ci-dessus, ce qui permet à Quentin de concevoir cette chronologie, c'est certainement la confusion qu'il fait entre un placement (c'est-à-dire 2 jetons sur la grille, comme lui rappelle Anthony à la réplique 42) avec le fait de poser un jeton sur la grille (comme nous l'avons vu avec la séquence entre Valentin et Tom dans la section précédente) : < *On peut faire  $n$  placements avec 1 jeton.* > (41a). Cette divergence de signification entre les deux élèves ne paraît pas poser de problème ici, Quentin sait bien qu'il y a deux jetons « posés » ou « placés » et c'est ça qu'il faut prendre en compte pour le dénombrement, qu'on les pose simultanément ou successivement.

Nous avons pu observer une erreur dans la mise en œuvre de cette règle. Il s'agit de ce passage du protocole 12 :

*Valentin montre avec le doigt des appariements possibles à partir du premier jeton.*

44. Valentin : C'est peut être ça, ça. Ça, ça... et d'autres. « Différents », c'est : combien tu peux faire de placements différents.

[...]

46. Valentin : Tu peux faire 40. Un jeton, tu peux le placer sur 20 cases et le deuxième...

[...]

57. Valentin : Puisqu'un jeton, tu peux le poser sur 20 cases différentes. Ensuite, il y a le deuxième. Tu peux aussi le poser sur 20 cases différentes...

58. Tom : Non, c'est 2 jetons qui s'appellent un placement.

59. Valentin : Oui, je sais !

60. Jérémie : Ce n'est pas un jeton après l'autre.

La réponse de Valentin (« 40 », réplique 46) semble renvoyer à la règle de la somme qui s'appliquerait alors de la manière suivante : il y a  $n$  façons de poser le premier jeton sur une des  $n$  cases de la grille et  $n-1$  (ou  $n$ ) façons de poser le second. Il y a alors  $n+n-1$  (ou  $n+n$ ) façons de poser le premier ou le second jeton. Il s'agit là de la



mise en œuvre de la règle de la somme, ce qui renvoie à une interprétation différente et inexacte du contenu de l'énoncé. Cette règle n'y est absolument pas pertinente : elle semble impliquer l'idée que les deux jetons puissent être distingués afin de réaliser les 40 façons de placer un jeton (rouge ou vert) sur la grille : il y a  $n$  façons de placer un jeton rouge ou  $n$  façon de placer un jeton vert, il a par conséquent  $n+n$  façons de placer un jeton sur la grille (quelque soit sa couleur). Nous retrouvons ici également la vision chronologique du placement des deux jetons – vision à laquelle s'oppose Jérémie (réplique 60). Cette mise en œuvre spontanée et non pertinente de la règle de la somme permet certainement d'expliquer certaines réponses fausses comme « 40 appariement possibles » trouvées à l'épreuve « Devoir sur table » pour cette situation.

Précisons que ce type de raisonnement erroné n'est certainement pas très fréquent sur l'ensemble de nos deux expériences. Nous trouvons peut-être le cas de l'élève 060 (Par, 4-20) qui répond 2x20 car tous les enfants doivent passer comme gendarme. Mais, rien n'est moins sûr. D'autre part, la réponse « 40 appariements possibles » n'est pas forcément liée à ce type de raisonnement. Nous trouvons des énumérations circulaires concernant des appariements ordonnés comme dans le travail de l'élève 211 ( $A_{slt}$ , 4-20), mais aussi certainement dans les réponses des élèves 001, 003, 210 (4-20) et 117 (Asgm, 20-4) qui explique qu'on peut tracer 40 segments car il y a deux extrémités et que par conséquent, il faut multiplier par 2.

### **C. Effet de nature sémantique pour les problèmes « partition » et « sélection ».**

Dans notre expérience, le problème « partition » est très proche du problème « sélection » pour deux raisons. D'abord, les deux renvoient à la même collection d'objets à appairer - des enfants jouant aux gendarmes et aux voleurs. Ensuite, parce que les problèmes qui leur correspondent présentent des niveaux de performances significativement peu différents. Rappelons qu'il s'agit des scores les plus bas de l'épreuve « Devoir sur table ». Il est alors raisonnable de penser qu'un effet de nature sémantique intervient de façon très importante dans l'interprétation des énoncés du problème pour freiner l'émergence ou la stabilisation d'une représentation de la situation qui accompagne ou induit une activité combinatoire.

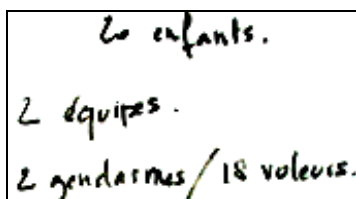
Ce qui les distingue, rappelons-le, c'est la façon d'apparier les objets : répartition de la collection en un groupe de 2 et un groupe de  $n-2$  pour le problème « partition », tirage de 2 objets parmi les  $n$  de la collection pour le problème « sélection ».

Rappelons que les résultats de l'épreuve « Devoir sur table » montrent une distribution différente des réponses fausses pour ces deux problèmes (cf. tableau II, p. 90) : le problème « sélection » est principalement associé à l'énumération partitive ou le calcul  $n/2$  (68,3 % des réponses) que ce soit pour  $n=4$  ou  $n=20$ . Ce n'est pas le cas pour le problème « partition » où les réponses fausses sont distribuées entre l'énumération partitive et les réponses autres (réponses incohérentes) qui font approximativement chacune 30 % des réponses. Le problème « partition » se distingue encore du problème « sélection » avec 12,7 % d'énumération pertinentes défaillantes dans l'organisation de l'inventaire (contre 0,8 % pour cette dernière). Nous n'avons pas testé la significativité de ces scores ; cependant, l'importance de ces différences (qui vont au minimum du simple au double) permet de penser qu'il est raisonnable de les prendre en compte. Nous terminons donc cette analyse des effets de nature sémantique par une comparaison des problèmes « partition » et « sélection ».

#### a. Le problème « partition »

L'analyse des protocoles de résolution du problème « partition » a permis de faire deux observations. La première implique la nature du modèle combinatoire dans l'interprétation et renvoie à une sémantique des relations, la seconde engage plutôt une sémantique des objets en jeu.

Notre première observation concerne deux groupes d'élèves (protocoles 16 et 20). Ils ont représenté par écrit ou sous forme de schéma la situation par une description qui partage les 20 enfants en une équipe de 2 gendarmes et une équipe de 18 voleurs comme dans cet extrait du protocole ou dans le suivant :



20 enfants.  
2 équipes.  
2 gendarmes / 18 voleurs.

Cette interprétation est juste mais elle peut induire une énumération partitive comme le montre l'exemple de Laure et Matthieu du protocole 16 :



Laure : Oui... On va faire des points... Voilà, on a 2. *Laure trace 20 croix. Elle en entoure deux. Puis elle montre les deux suivants et les 18 autres. Après, c'est ces deux là et puis tous les autres c'est les 18. Elle recommence comme cela pour chaque groupe de deux. Après, ces c'est deux là, et tous les autres c'est les 18. Après, ces c'est deux là, et tous les autres c'est les 18. Après, ces c'est deux là, et tous les autres c'est les 18. Après, ces c'est deux là, et tous les autres c'est les 18. Après, ces c'est deux là, et tous les autres c'est les 18.*

16. Matthieu : 10 !

17. Laure : Ben chais pas.

18. Matthieu : Une fois, 2 fois, 3 fois, 4 fois, 5 fois, 6 fois, 7 fois, 8 fois, 9 fois, 10 fois.

En contrepartie, ce mode de représentation de la situation qui « partitionne » le tout en deux parties complémentaires (2 et  $n-2$ ) ne semble pas faire obstacle à la prise de conscience qu'il existe d'autres appariements possibles. C'est ce que montre la réplique 23 de Laure (du même protocole) qui introduit alors une signification nouvelle dans la situation, l'idée selon laquelle un objet peut être apparié à tous les autres objets :

19. Laure : Il faut que ce soit toujours des enfants différents ?

20. Expérimentateur : Je ne peux pas vous aider.

21. Laure : D'accord.

22. Matthieu : Déjà, il y a 10 répartitions différentes vu que ce sont des enfants différents.

23. Laure : Par exemple, après ça peut être celui-là et celui-là... *Laure entoure la première croix et la dernière de la collection.* Et il y en a 18...

Une seconde observation touchant les protocoles du problème « partition » concerne une difficulté d'interprétation qui se pose pour les élèves. Il s'agit de la distinction entre une partie (synonyme d'un jeu) et une répartition. Dans l'énoncé du problème, il est spécifié que pour jouer, à chaque nouvelle partie, on fait une nouvelle répartition des enfants en 2 gendarmes et 18 voleurs. Les élèves qui assimilent la répartition à la partie proposent une énumération partitive alors que les autres intègrent dans leur interprétation l'idée qu'il y a beaucoup plus d'appariements (donc qu'un objet peut être apparié plusieurs fois). Dans l'exemple suivant (protocole 09), Philippe qui vient de résoudre le problème par l'opération  $n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1$  distingue nettement les deux termes (réplique 32). Il met fin à un échange entre Andy qui assimile l'appariement à la partie (à un jeu) et Alexis qui lui montre d'autres répartitions possibles :

*Andy montre les 10 groupes de 2 traits d'une énumération partitive.*

30. Andy : Et ça veut dire 1 partie, 2 parties, 3...

31. Alexis : Oui, mais ils peuvent aller... puisque celui-là, il peut aller avec celui-là.

*Alexis lui montre une énumération systématique sur la ligne de groupes de 2 traits.*

32. Philippe : Non, ils ne demandent pas combien de parties, ils demandent combien de répartitions possibles. Ça ne veut pas dire combien ils ont fait de parties.

Voici l'exemple du protocole 20 qui semble confirmer cette idée :

*Martin réagit au résultat d'une énumération partitive : 10.*

42. Martin : Mais, non. Mais, ils ne te demandent pas ça. Ils te demandent combien il y en a pour que... Ils ne te demandent pas combien il y a pour que... pour que les 20 enfants, ils fassent gendarme. Ils ne te demandent pas pour que les 20 enfants fassent gendarme.

43. Raphaël : Répartition, c'est le nombre de parties à mon avis.

44. Martin : Oui, mais... enfin, chais pas... Parce qu'ils nous avaient demandé combien de répartitions différentes sont possibles...

45. Tristan : Moi, je pense que c'est plutôt...
46. Martin : Tu vois, s'ils nous avaient demandé, en tout cas... Euh...
47. Tristan : Ah, oui. J'ai compris. Ce n'est pas ça en fait. Le résultat...
48. Martin : Ça, ça serait... ça serait 10, si c'était combien de parties pour que les 20 fassent gendarme.
49. Tristan : Oui, mais là, c'est le nombre de répartitions possibles. Donc, euh... il y en a plus. Enfin...

Raphaël, qui divise les 20 enfants en 10 groupes de 2, assimile (comme Andy, ci-dessus) les répartitions à dénombrer avec le nombre de parties (réplique 43) certainement parce que le terme de « partie » renvoie à des significations plus concret et donc à une situation plus facile à traiter, ce qui ne serait pas le cas avec « répartition ». La réplique 48 de Martin contredit la réponse partitive de Raphaël et nous l'interprétons selon cette assertion : *< il ne s'agit pas du nombre de parties (« jeux ») pour que chaque enfant ait été au moins une fois gendarme >*. Tristan, à la réplique 49, renforce cette objection en insistant sur l'idée de « nombre de répartitions possibles ». Ce changement de signification permet d'inférer un nombre plus important d'appariements.

L'objection de Martin peut s'appliquer à Natasha (protocole 02) qui ne comprend pas pourquoi chaque enfant a 19 possibilités d'être gendarme avec un autre. Elle argumente de cette façon : *« Parce que chaque enfant peut passer une fois. »* (réplique 83). Pour elle, chaque objet n'est apparié qu'une fois (répliques 20 et 78) parce que *« S'ils pouvaient être plusieurs fois ça n'a aucun sens. »* (réplique 11). Mais elle n'explicite pas plus cette idée. Il est possible de la comprendre avec la réplique 139 de Lina (protocole 24) : *« Ben, non. Il ne peut pas jouer deux fois. C'est de la triche... »* Il arrive souvent que ce type d'ancrage des significations dans le vécu de l'élève puisse être facilitateur<sup>36</sup> dans le traitement de la situation, ce n'est apparemment pas le cas avec

<sup>36</sup> Nous faisons ici référence aux travaux sur la notion de « marquage social ». Ils concernent des tâches dont le traitement est déterminé par des règles sociales implicites. Le sujet peut résoudre le problème soit en se référant à ses connaissances relatives aux normes sociales en jeu, soit il met en œuvre des schèmes cognitifs comme si la tâche était décontextualisée (Doise, Dionnet, Mugny, 1978 ; Doise et Mugny, 1981 ; Mugny et Doise, 1983 ; Doise et Mugny, 1997). Les travaux de Wason (1966 ; 1968), Cheng et Holyoak (1985), Cheng, Holyoak, Nisbett, Olivier (1986), Zhou (1987 ; 1988) montrent aussi le caractère bénéfique du marquage social d'une tâche par son influence sur la représentation du problème et les procédures

notre problème « partition » pour lequel la contextualisation dans le vécu social semble plutôt faire obstacle.

### **b. Le problème « sélection »**

La principale remarque relative à cette situation concerne la récurrence d'un thème particulier. Dans chacun des protocoles (à l'exception du 13), il est question d'intégrer les voleurs dans la solution :

Nicolas : (*réagissant à une énumération partitive*) Oui, mais c'est bizarre s'il n'y a pas les voleurs. (Protocole 04, réplique 25)

Alexia : (*réagissant à un calcul  $n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1$* ) Mais, non, il faut une équipe de 2 gendarmes. Mais les voleurs, ils sont où ? (Protocole 06 / 79) Oui mais les enfants, il y a aussi les voleurs. C'est pas parce qu'ils jouent aux gendarmes qu'ils sont voleurs ? (Protocole 06, réplique 81) [...] dans chaque équipe, il y a 2 gendarmes mais aussi des voleurs. On ne peut pas dire que les voleurs comptent pour les gendarmes (Protocole 06, réplique 84) Alors, pourquoi on nous parle de voleurs ? (Protocole 06, réplique 86) [...] s'il n'y a que des gendarmes, il n'y a pas de jeux. (Protocole 06, réplique 118) [...]

Gary : Déjà, je pense qu'il faut une équipe égale en nombre de gendarmes et de voleurs (Protocole 19, réplique 1).

Mathieu : Il ne faut pas oublier qu'il y a les voleurs aussi. (Protocole 19, réplique 08)

Mady : (*Réagissant à  $n/2$* ) Ben, non. Il faut des voleurs. (Protocole 21, réplique 10)

Carole : (*Réagissant à  $n/2$* ) C'est trop simple ! Mais s'il faut des voleurs ? (Protocole 25, réplique 20) [...] Ben, il faut au moins 2 voleurs pour que ça fasse un nombre pair. (Protocole 25, réplique 30)

Il semblerait que ce soit une interprétation erronée de l'énoncé qui incite les élèves à vouloir intégrer les voleurs dans la solution. Elle consiste à se représenter le jeu

---

correspondant. Certains auteurs expliquent ce phénomène par l'activation d'un « schème pragmatique de raisonnement » (Giroto, Gilly, Blaye et Light, 1989 ; Light, Blaye, Gilly et Giroto, 1989).

comme plusieurs équipes composées de gendarmes et de voleurs jouant simultanément : Alexia du protocole 06 finit par comprendre son erreur en avouant qu'elle croyait qu'il y avait plusieurs équipes (réplique 127). Dans cette perspective, il est tout à fait normal qu'elle dise que s'il n'y a que des gendarmes, il n'y a pas de jeu possible puisqu'il n'y a plus de voleurs (réplique 118) et que, dans chaque équipe, il doit y avoir à la fois des gendarmes et des voleurs (réplique 84).

Une autre interprétation erronée de l'énoncé conduit à une représentation du jeu comme constitué de plusieurs équipes de 2 gendarmes avec au moins une équipe de 2 voleurs. C'est ce que proposent Ariane et Mady du protocole 21 (répliques 17 à 29). C'est dans ce cadre-là que nous pouvons comprendre l'assertion de Carole citée ci-dessus (réplique 30) : *< Si le jeu n'a pas un nombre pair de voleurs alors, il n'aura pas un nombre pair de gendarmes puisqu'il faut des groupes de 2 gendarmes. >*

Le protocole 19 (répliques 12 à 52<sup>37</sup>) montre le cas d'élèves qui ont fini par comprendre que, dans le jeu, il n'y a qu'une équipe de 2 gendarmes et que le reste des enfants sont automatiquement les voleurs. Or cette représentation de la situation semble faire obstacle à la mise en oeuvre d'une énumération systématique : il est possible qu'elle renvoie alors à des significations erronées comparables à celles relevées ci-dessus pour la situation de partition.

L'idée d'intégrer les voleurs dans la solution est largement moins importante dans les protocoles de cette dernière. On retrouve Raphaël du protocole 20 qui réagit à une solution  $n/2$  en demandant ce que l'on fait des voleurs (réplique 17). Mais il comprend tout de suite l'explication de Martin : « Ben, à chaque fois, ils tournent. » (Réplique 18). Et il ajoute plus loin : «... tout le monde fait plusieurs fois les voleurs et tout le monde fait une fois gendarme. » (Réplique 33). Cette idée de rotation des enfants dans les deux équipes, dans les problèmes « partition » évite de se poser la question des voleurs.

---

<sup>37</sup> Nous ne reproduisons pas ici cette séquence du fait de sa longueur – cf. annexes.

## VI. Conclusions

### 1. Rappel du projet général de cette recherche

Cette recherche s'intéresse aux effets liés à la nature des modèles combinatoires implicites sur l'élaboration d'une réponse à des problèmes de dénombrement de combinaisons de 2 objets pris parmi  $n$ . Ces modèles combinatoires implicites relèvent d'une sémantique des relations entre les objets de la collection, plus précisément à la manière de les apparier : distribution de 2 objets dans  $n$  cases, partition de la collection en un groupe de 2 et un groupe de  $n - 2$  objets, sélection d'un échantillon de 2 objets parmi  $n$  et association 2 à 2 des  $n$  objets. Cette variable expérimentale, c'est un auteur Canadien, Dubois, qui, en 1984, a publié une réflexion à son sujet. Son travail théorique avait pour objet de proposer un enseignement plus rationnel de certains éléments de dénombrement élémentaire.

Notre travail est précédé des thèses de Navarro-Pelayo 1994 et de Roa, 2000 qui croisent à la fois ces différents modèles implicites et les opérations combinatoires (arrangement, permutations et combinaisons). Leurs recherches portant respectivement sur une population de collégiens et d'étudiants en mathématiques, montrent qu'il est pertinent de considérer les modèles combinatoires implicites comme les modalités d'une variable didactique.

Les décalages observés dans ces recherches montrent que les modèles combinatoires implicites possèdent des propriétés sémantiques particulières qui participent à l'élaboration de la réponse. Pour cette raison, nous analysons les réponses observées en terme de procédures.

Nous avons recours au concept de représentation pour rendre compte des processus qui organisent la résolution des problèmes. A ce propos, la cohérence et la pertinence de la réponse est issue, d'une part, de l'interprétation de l'énoncé donc des significations que l'élève porte à la fois sur le contexte matériel et social de la situation évoquée ainsi que, d'autre part, des relations logico mathématiques qui organisent l'agencement de ces contextes. La pertinence et la cohérence de la réponse sont donc



fortement liées à la qualité de la relation que la représentation de l'élève établit avec la réalité.

Les élèves qui constituent nos échantillons n'ont fait l'objet d'aucun enseignement en matière de dénombrements élémentaires. Ainsi, ne possédant pas de connaissances spécifiques en matière de dénombrement élémentaire, nous faisons l'hypothèse qu'ils sont plus sensibles à la sémantique des modèles combinatoires implicites.

## **2. Rappel des expériences mises en oeuvre**

Ce travail est constitué de deux épreuves de résolution de problème qui introduisent comme variable expérimentale les modèles combinatoires implicites (distribution, partition et sélection) auxquels nous avons rajouté un nouveau : l'association. La première épreuve a pour objectif d'étudier les procédures mises en oeuvre pour répondre à la tâche. Il distingue ainsi Il s'agit de l'épreuve « Devoir sur table » au cours de laquelle des élèves de 4ème devaient résoudre individuellement deux problèmes liés au même modèle combinatoire implicite. L'un des deux problèmes porte sur une collection de faible effectif ( $n=4$ ) qui favorise la mise en oeuvre d'énumérations des appariements possibles dans un registre graphique. L'autre problème porte sur une collection plus importante ( $n=20$ ) et nous permet d'observer des réponses sous forme de calculs relatifs au cadre arithmétique. Ces deux types de réponse (graphique et arithmétique) sont des réalisations des procédures étudiées dans des registres différents de représentation et de traitement.

Cette première épreuve permet non seulement de recueillir les procédures mises en oeuvre par les élèves mais elle confirme aussi l'effet des modèles combinatoires implicites mis en évidence par Batanero, Godino et Navarro-Pelayo (1997). Cependant, elle présente deux manques : d'une part, elle ne nous permet qu'une analyse en terme de procédures et de performances ; d'autre part, comme il n'a pas été possible de neutraliser la variable liée à la sémantique des objets en introduisant des collections de nature différente (des personnes qui se saluent ou qui jouent, des grilles et des jetons, des points et des segments), cette dimension intervient conjointement.

La deuxième expérience a donc pour objectif de définir des modèles de résolution qui puisse rendre compte des différentes procédures qui ont été observées au cours

de l'épreuve « Devoir sur table ». Pour cela, nous cherchons à décrire la manière dont le contexte sémantique des énoncés (caractérisé à la fois par les modèles combinatoires implicites et les objets appariés) intervient dans l'interprétation de l'énoncé et détermine donc tel ou tel type de réponse. Nous situons ces modèles de résolution dans l'interface de deux pôles : d'une part, la situation définie à la fois par la tâche mathématique des problèmes posés et les caractéristiques sémantiques relatives aux objets et aux relations; d'autre part, au niveau des élèves, l'émergence d'un ensemble de significations concernant l'interprétation de la situation, associées ou déterminant le mode de traitement de cette dernière.

Pour cette expérience, nous avons mis en œuvre un dispositif de travail par ateliers. Les élèves ont travaillé en équipes de trois sur un des problèmes de l'épreuve « Devoir sur table ». Leurs recherches n'ont concerné que les énoncés pour lesquels  $n=20$ . Ce dispositif de collaboration nous a permis d'observer, au cours des interactions entre élèves, des moments où les significations à porter à la situation sont négociées afin d'établir une interprétation consensuelle des données du problème et, donc, une réponse commune.

### **3. Rappel des principaux résultats**

#### **A. Les résultats de l'épreuve « Devoir sur table »**

##### **a. Classification des réponses et procédures associées**

###### **• *Les réponses justes***

L'analyse du corpus recueilli permet de distinguer plusieurs classes de réponses associées à des procédures spécifiques. Tout d'abord, nous avons, évidemment, les réponses justes et les réponses fausses. Mais il y aura aussi des réponses que nous qualifions d'intermédiaires.

Il va de soit que les réponses justes sont celles qui présentent un inventaire exhaustif et sans répétitions des combinaisons possibles. L'analyse des protocoles recueillis montre que les procédures associées à ces réponses donnent des inventaires organisés

sous deux formes : l'énumération se fait soit sur des listes, soit sur des figures. Mais, nous avons aussi observé des procédures arithmétiques lorsque les élèves cherchent la réponse par des calculs. Finalement, il y a 4 sortes d'énumérations qui donnent des réponses justes :

Il y a d'abord l'énumération systématique à élément constant : un premier objet est fixé et les élèves énumèrent dans l'ordre les combinaisons possibles entre ce dernier et les autres objets de la collection. Par exemple, sur la collection A, B, C, D, l'élève fixe A et énumère les appariements suivants : AB, AC et AD. Puis il recommence avec B, puis avec C.

Une deuxième procédure concerne ce que l'on peut appeler l'énumération corrigée : dans un premier temps, les élèves dénombrent des arrangements, comme c'est le cas ici, puisqu'ils constituent des appariements ordonnés : par exemple, AB et BA. Puis ils éliminent les doublons pour respecter le caractère non ordonné des combinaisons.

Une troisième procédure, que nous qualifions d'énumération partitive répétée, concerne essentiellement les collections de 4 objets. Les élèves partagent la collection en deux groupes de deux objets et recommencent jusqu'à épuisement des possibles. Par exemple, pour la collection A, B, C, D, une première division distingue AB de CD. Une deuxième isole BC de AD et une troisième sépare AC de BD.

Une quatrième procédure se présente sous la forme d'une énumération circulaire complétée d'une énumération systématique : cela veut dire que, dans un premier temps, les élèves relient chaque objet à l'objet suivant comme pour former une chaîne. Puis, ils complètent l'inventaire par une énumération systématique.

Enfin, il existe deux procédures arithmétiques qui permettent de traiter de façon plus adaptée les énoncés pour lesquels l'effectif de la collection est 20 objets. Nous les désignons en terme de procédures additives et multiplicatives puisque pour la première, les élèves font le calcul suivant :  $19+18+17+16+ \dots +3+2+1$  et, pour la seconde, ils produisent le calcul suivant :  $(19 \times 20)/2$

La procédure additive correspond au même schéma d'organisation que l'énumération systématique à élément constant : le premier des 20 objets peut s'apparier avec les 19 autres ; puis le second avec les 18 autres, etc. De la même façon, la procédure multiplicative correspond à l'énumération corrigée (qui commence par dénombrer

des arrangement), dans un premier temps, les élèves considèrent que chacun des 20 objets peut s'apparier avec les 19 autres et qu'il y a en conséquence  $20 \times 19$  appariements possibles. Puis, en tenant compte du caractère non ordonné des combinaisons, ils éliminent les doublons en divisant par deux le résultat obtenu.

#### • *Les réponses fausses*

La réponse de nombreux élèves ne relève pas d'une activité combinatoire apparente. Ils produisent donc des réponses fausses. Deux procédures se distinguent alors, l'énumération partitive et l'énumération circulaire. Pour l'énumération partitive, la collection est simplement divisée en groupes de deux objets ( $n/2$ ) : AB, CD, EF, etc. L'énumération circulaire se contente d'associer chaque objet au suivant. Les élèves dénombrent en fait des intervalles entre  $n$  objets alignés : AB, BC, CD, etc.

#### • *Réponses intermédiaires*

Pour certaines réponses, les élèves dénombrent soit des arrangements (AB, BA, etc.), soit des combinaisons avec répétitions (AA, BB, etc.). Il nous est donc difficile de considérer ces réponses comme strictement justes. D'autre part, il est difficile de les situer dans la même catégorie que les énumérations partitives ou circulaires puisqu'elles relèvent d'une activité combinatoire. Nous avons donc constitué une nouvelle classe et nous qualifions ces réponses d'intermédiaires supérieures.

Pour quelques réponses, l'inventaire des combinaisons n'est pas exhaustif du fait de procédures mal organisées ou non pertinentes. Comme elles portent encore sur des combinaisons – ce qui n'est pas le cas pour les réponses strictement fausses - nous les qualifions de réponses intermédiaires inférieures.

### **b. Description des rapports entre procédures et modèles combinatoires implicites**

Les réponses des élèves se distribuent différemment selon les problèmes, ce qui atteste bien l'existence d'un effet lié à la sémantique des situations.

Le problème A<sub>slt</sub> répartit également ses protocoles entre réponses juste (énumérations de combinaisons) intermédiaires (énumérations de combinaisons avec répétition

ou d'arrangements) et fausses (réponses « autres »). L'analyse des protocoles recueillis à cette épreuve semble montrer que les élèves qui ont travaillé sur ce problème ont considéré qu'il y avait deux saluts entre deux personnes (A salue B et B salue A) et ont donc dénombré des appariements ordonnés d'où un nombre important d'énumérations d'arrangements.

Le problème  $A_{sgm}$ , par contre, présente moins de réponses intermédiaires (surtout des énumérations défaillantes) mais plus de réponses fausses (un peu moins d'une sur deux). Ses réponses justes (1 sur 3), sont des énumérations défaillantes. L'analyse des protocoles liés à ce problème montre que ces énumérations défaillantes semblent venir d'un transfert sans adaptation de la réponse au problème  $n=4$  au problème  $n=20$  : les élèves procèdent à un inventaire des appariements sur figure en décomposant la collection de 20 points en sous collections de 4 points. Nous avons défini cette réponse en terme de « subordination de la procédure à une structure énumérative locale » (réponse intermédiaire inférieure).

Dans l'ensemble, le problème « association » semble plutôt favoriser la mise en œuvre d'activités combinatoires alors que les autres situations génèrent plutôt des réponses fausses (6 réponses sur 10 – alors que les autres sont réparties à peu près également entre les réponses strictement justes et les réponses intermédiaires).

Ainsi, le problème « distribution » présente surtout des énumérations partitives (4 réponses sur 10) et des réponses fausses « autres » (2 sur 10). À l'étude des protocoles, il nous a paru probable que les élèves qui produisent des énumérations partitives présentent une vision « statique » de la situation : ils semblent dans l'incapacité d'introduire dans leur réponse une successivité qui permettrait à l'énumération de se produire en associant chaque objet à chacun des autres. Leur énumération partitive est figée sur leur schéma qui présente une partition de la collection en 10 groupes de 2 cases. Une telle représentation du problème montre que les élèves n'envisagent pas la possibilité d'apparier d'autres fois les objets de la collection.

Le problème Par connaît un peu la même répartition que Dis avec plus de réponses « autres » (1 sur 3) au détriment des énumérations partitives (1 réponse sur 3). Le problème Sél est surtout caractérisé par des énumérations partitives (7 réponses sur 10). Les réponses à ces deux problèmes semblent associées à l'idée qu'il n'est pas possible à

un enfant de jouer plusieurs fois comme gendarme. Nous avons relevé une autre représentation non pertinente (plus souvent avec Sél qu'avec Par), celle qui fait jouer plusieurs équipes de gendarmes en même temps.

Nous retrouvons beaucoup de ces observations relatives aux interprétations des données du problème par les élèves, dans l'analyse des protocoles de l'épreuve « Atelier ».

### **c. Les effets liés à l'ordre de résolution des problèmes**

Cette épreuve présente deux modalités (4-20 et 20-4) liées à l'ordre de résolution des problèmes par les élèves. Ainsi, la modalité 4-20 fait d'abord travailler les élèves sur le problème dont la collection est de 4 objets (et inversement pour la modalité 20-4). Nous avons donc également étudié les effets liés à ces deux modalités en terme de progrès, de stabilité ou de régression.

Sur l'ensemble des réponses, nous observons plutôt une grande stabilité, essentiellement quand le premier problème travaillé est  $n=20$ . Cette stabilité concerne surtout les réponses fausses, plutôt pour le problème Sél. Un premier échec au problème quand  $n=20$  semble rendre certains élèves incapable de le réussir quand  $n=4$  (alors qu'il aurait pu le réussir en le travaillant en premier). Nous pouvons penser, dans ce cas, que la complexité du premier problème rend son analyse confuse et que cette confusion se reporterait pour le second problème, neutralisant de façon critique les processus d'interprétation des données.

La stabilité des réponses justes vient juste après et concernent surtout les problèmes « association » et « partition ». Nous ne retrouvons pas d'effet lié à l'ordre des problèmes comme c'est le cas pour les stabilités des réponses fausses.

Quand les réponses des élèves ne sont pas stables, elles semblent plutôt régresser, surtout quand le problème  $n=4$  est travaillé en premier. Ainsi, l'interprétation correcte des données du problème quand  $n=4$  semble présenter certaines difficulté de transfert à  $n=20$ . Cette observation concerne les problèmes Dis,  $A_{sgm}$  et Par. Mais ces deux dernières peuvent tout de même connaître des progrès (peu importants), essentiellement quand c'est le problème  $n=20$  qui est résolu en premier. A ce niveau, ils se distinguent

quelque peu du problème Sél (qui, rappelons-le connaît plutôt une stabilité dans les réponses fausses entre les deux problèmes).

## **B. Les résultats de l'épreuve « Atelier de résolution »**

A partir du moment où nous étudions les interactions produites par des élèves travaillant en atelier, il nous a fallu définir des instruments spécifiques afin d'analyser les contenus enregistrés et répondre aux questions que l'on se pose. Nous nous sommes donc inspirés de l'analyse illocutoire développée au sein du Laboratoire de Psychologie de l'Interaction – Groupe de Recherche sur les Communications (Nancy 2). Il a bien sûr été nécessaire d'adapter au corpus recueilli les outils que cette méthode propose. En conséquence, ce dernier a fait l'objet d'une analyse en terme « d'échanges résolutaires ».

Nous avons ainsi défini des séquences spécifiques de négociations (co-constructions et conflits socio-cognitifs) qui participent à la trame des interactions entre les élèves. Ces séquences sont constituées de conduites interactives intentionnelles (essentiellement des actes illocutoires, mais aussi quelques schématisations, et autres écritures heuristiques) caractérisées par des propriétés de réussite et de satisfaction. Ainsi, l'assertion d'un élève dont le contenu porte sur une propriété de la situation est satisfaite si son interlocuteur l'intègre dans son interprétation du contexte sémantique et présente une solution qui en tient compte. Ces propriétés attribuent à la séquence un caractère homogène qui nous permet d'associer, au sein des échanges et pour chaque procédure (ou contre des solutions concurrentes), un ensemble d'assertions données. Ces dernières renvoient alors à un ensemble de significations particulières (associées à certaines procédures) que les élèves élaborent relativement aux données du problème afin de le résoudre.

De la sorte, il nous a été possible de définir deux modèles de réponses selon qu'elles sont liées aux réponses pertinentes (réponses justes et intermédiaires) ou aux réponses fausses. Ces deux modèles de réponses sont associés en une synthèse générale qui rend compte des principales régularités observées au niveau des différents ensembles de significations et des conflits qu'ils entretiennent entre eux. Tout cela est présenté ci-dessus (Figure 5, page 217). Rappelons seulement et en quelques mots les problèmes

d'interprétation que rencontrent les élèves relativement à la réponse fausse la plus fréquente, la réponse partitive (énumération partitive et calcul  $n/2$ ). Les élèves qui ont fait ce type de réponse semblent incapables d'inférer ou d'intégrer la donnée implicite  $n-1$  correspondant au nombre d'assertions possibles que chaque objet peut constituer dans la collection. Il arrive même que ces élèves refusent cette donnée du fait qu'elle n'est pas écrite dans l'énoncé du problème. Ils ne considèrent que la collection dans son ensemble et l'appariement en particulier, principalement considérés comme le tout et sa partie.

L'observation de l'évolution des réponses des élèves au cours des négociations semble montrer que ces réponses partitives sont celles qui apparaissent en premier. Mais une bonne partie des élèves qui les proposent parviennent à changer leur interprétation du contexte sémantique (spontanément ou sous l'influence des autres) et produisent des réponses pertinentes. En contre partie, nous n'avons observé que très peu de régressions, que ces dernières aient été trouvées tout de suite ou après évolution des interprétations. Ces observations peuvent faire penser que répondre à un problème demande parfois de savoir favoriser une réponse contre un autre qui le concurrence.

Les résultats d'une telle analyse s'appliquent indistinctement à tous nos problèmes. Mais ils ne sont pas suffisamment détaillés pour rendre compte de l'hypothèse d'un effet lié à la sémantique des modèles combinatoires implicites. Pour cela, il est nécessaire de réintroduire notre variable expérimentale dans cette analyse en nous intéressant aux assertions particulièrement ancrées dans le contexte sémantique (on ne peut en traduire le contenu avec les termes généraux « objets » et « appariements »). Ces assertions sont bien sûr, elles aussi, intégrées dans des échanges résolutives et, dans la mesure où on ne peut les décontextualiser, elles sont sensées pouvoir livrer des indices importants sur les effets liés à la sémantique des situations en jeu.

Nous avons ainsi observé dans le problème « association – segments » des problèmes de définition liés à la notion de segment. Certains élèves semblent avoir une conception empirique de cette notion en terme de trait reliant deux points (parfois assimilé au côté d'un polygone). Cela pourrait expliquer l'importance des énumérations circulaires (19,7 %) pour ce problème à l'épreuve « Devoir » et la présence d'énumérations circulaires complétées d'une énumération systématique (seulement partagées avec le problème Dis, certainement pour d'autres raisons). Cette dernière procède



ture correspondant certainement à une évolution de l'interprétation du contexte sémantique : les élèves finissent par rapprocher, en partie, la notion de segment à celle de droite définie comme ensemble de points. Ils arrivent alors à concevoir qu'entre trois points alignés sur une droite virtuelle, il existe aussi un segment possible entre le premier et le troisième point.

Le problème « association – salutations » présente aussi une difficulté de définition, liée cette fois à la signification du salut. Les élèves considèrent qu'il y a deux saluts entre deux personnes se serrant la main et non une seule salutation (A salue B et B salue A). Ainsi, ils dénombrent des appariements ordonnés permet sans doute d'expliquer à la fois la domination des procédures de types  $n*n-1$  pour cette situation et le fait qu'il y a relativement plus de procédures corrigées  $(n*n-1)/2$  que dans les autres situations (correspondant encore à une évolution de l'interprétation du contenu de l'énoncé).

Pour le problème « distribution », nous avons pu constater que le dessin de la grille, avec les deux jetons posés sur deux cases semble induire une interprétation de la situation en terme de tout et de partie de ce tout. Cette représentation du problème semble favoriser une énumération partitive ou un calcul partitif  $n/2$  (qui dominant chez elle), et parfois, une énumération partitive répétée quand l'interprétation du contexte sémantique évolue.

D'autre part, nous avons constaté un nouveau problème d'interprétation. Il semble lié à une confusion entre « un placement » (un appariement de deux cases par deux jetons) et le fait de poser un jeton sur une case (on le « place », aussi). Cette confusion permet d'expliquer les (relativement) nombreuses réponses à ce problème qui donnent 20 comme résultat (on peut placer 20 jetons sur la grille).

Nous avons relevé une dernière difficulté liée au problème « distribution ». Elle semble liée au fait qu'il soit possible de placer alternativement un jeton après l'autre pour constituer un appariement. Certains élèves peuvent confondre entre « placer le premier ET le second jeton » avec « placer le premier OU le second ». Dans le premier cas, cela coordonne les deux actions et détermine un dénombrement d'arrangements : s'il y a  $n$  façon de placer un premier jeton et  $n$  façon d'en placer un deuxième, alors il y a  $n*n$  façon de placer le premier puis le deuxième. Dans le second cas, le raisonnement

de l'élève juxtapose les deux actions : il y a  $n+n$  faons de placer le premier ou le second. Cette difficulté reste tout de même rare dans l'ensemble des réponses recueillies.

Jusqu'à présent, nous avons essentiellement rencontré des difficultés d'interprétation liées aux significations portées sur les objets appariés mais peu de données sur l'effet sémantique des modèles combinatoires implicites. Les problèmes « partition » et « sélection » neutralisent les caractéristiques des collections en jeu puisqu'il s'agit dans les deux cas d'enfants jouant aux gendarmes et au voleur. Les différences observées devraient alors relever de la seule sémantique des relations. Rappelons que la seconde semble particulièrement favoriser (ou moins rejeter) les réponses partitives (énumérations partitives et calcul  $n/2$ ) à l'épreuve « Devoir sur table » (plus de deux fois plus que la première : 68,3 % contre 29,9 %).

Le problème « partition » présente conjointement les deux parties de la collection : les gendarmes et les voleurs alors que le problème « sélection » centre l'attention sur les seuls gendarmes. Or, c'est dans avec dernière situation que nous avons observé à l'épreuve « Atelier » le plus de demandes, de la part des élèves, d'intégrer coûte que coûte les voleurs dans la réponse (alors qu'ils n'ont rien à y faire, ne participant aux appariements qu'en tant que réserve de joueurs). Enfin, pour le problème « partition », la remarque d'une élève qui affirme que ce serait « de la triche » (sic) de passer plusieurs fois comme gendarme nous laisse penser que cette situation est socialement marquée pour elle et les règles d'équité inhérentes à tous les jeux semblent donc accompagner l'idée qu'un objet ne peut être apparié qu'une seule fois (et, donc, empêcher toutes possibilités de réponses pertinentes).

Il est important de signaler ici que nous avons trouvé certaines convergences dans l'étude des réponses issues des deux expériences. Cela nous permet de penser que les modèles de résolution, issus de l'analyse de contenu des interactions entre élèves permettent aussi de rendre compte des réponses produites à l'épreuve « Devoir sur table ». Ceci n'est pas surprenant si on accepte l'idée que les processus langagiers de négociations activés entre les élèves pour résoudre collectivement les problèmes posés, se retrouvent de façon équivalente, mais intériorisée, au niveau intra individuel avec les mêmes effets de régulations et de conflits.

## 4. Quelques perspectives de recherche

Le projet initial de cette recherche concerne l'étude des effets liés aux modèles combinatoires implicites sur la façon dont les élèves peuvent résoudre les problèmes de dénombrement de combinaisons. Cependant, l'ensemble de nos observations semble impliquer de façon non négligeable d'autres caractéristiques contextuelles des collections en jeu comme les relations spatiales, temporelles, sociales, etc. des situations de référence. Par conséquent, nous devons bien reconnaître que la part liée à la sémantique des modèles combinatoires implicites dans l'élaboration d'une réponse particulière reste encore assez difficilement saisissable. La question qui se pose à présent porte sur la façon dont il serait possible de contourner cette difficulté et de saisir avec plus de précision l'objet de cette recherche. Sans être pessimiste sur ce point, nous anticipons un certain nombre d'obstacles qui pourraient contrarier la réalisation de ce projet.

Il y aurait deux façons de transformer le protocole expérimental : le recours à des énoncés non contextualisés ou le recours à la même situation de référence pour les quatre modèles combinatoires implicites (comme nous l'avons fait pour Sél et Par). Dans le premier cas, il est possible que l'utilisation d'énoncés « neutres », sans contexte sémantique connoté<sup>38</sup>, n'aurait pas permis de cerner le problème :

Il est fort probable que les élèves vont spontanément substituer ces objets neutres par des objets contextualisés matériellement ou socialement afin de pouvoir traiter le problème d'une façon ou d'une autre. Cette substitution fortuite, opportuniste, risque d'introduire dans les représentations des significations qui échapperaient expérimentalement. Dans ce cas, les réponses produites seraient encore plus difficiles à appréhender. Il serait néanmoins possible de limiter cette difficulté en demandant après coup à quels référents l'élève a eu recours pour résoudre son problème. Ce type d'étude pourrait être relativement riche en données sur l'élaboration d'une représentation du problème associée à chacun des modèles combinatoires implicites. Pour chacun de ces derniers, cela permettrait d'attester l'éventuelle existence de collections privilégiées, voire de situations de référence prototypiques. En l'occurrence, il serait possible de cerner des pro-

---

<sup>38</sup> *Combien y a-t-il de façon d'associer deux à deux 20 objets ? de distribuer 2 objets dans 20 endroits différents ? de séparer 20 objets en un groupe de 2 et un groupe de 18 ? de sélectionner 2 objets parmi 20 ?*

blèmes de compatibilités entre ces dernières et les collections auxquelles nous avons eu recours. Nous pouvons avancer l'hypothèse qu'en cas d'éventuelles incompatibilités, les performances peuvent connaître des baisses significatives. Dans cette éventualité, il s'agirait alors d'une dimension que nous aurions mal contrôlée dans notre recherche.

D'autre part, si nous avons réussi à utiliser le même référent pour l'ensemble de nos problèmes, il aurait certainement été plus aisé de distinguer l'influence due à la sémantique des objets de celle qui est liée aux modèles combinatoires implicites. Cependant, cela n'aurait pas pour autant libéré le raisonnement de l'élève des contingences issues de cette dimension du contexte sémantique.

Ces problèmes de « filtrage » de données nous questionnent sur la réelle possibilité d'étudier expérimentalement et de façon complètement indépendante les effets uniquement liés à la sémantique des modèles combinatoires implicites.

Les perspectives de recherches complémentaires ne manquent pas et nous pouvons encore envisager quelques pistes qui paraissent importantes pour développer notre projet. D'une part, il serait intéressant de procéder à des travaux qui joueraient sur le paramètre  $p$  comme variable expérimentale – autrement dit le nombre d'objets qui définissent l'appariement : combien de triangles ou de quadrilatères sont possibles avec  $n$  points ? etc. D'autre part, ce travail n'a porté que sur des dénombrements de combinaisons. Il est donc nécessaire de le compléter par les autres opérations combinatoires que sont les arrangements et les permutations. Cependant, en croisant la variable liée aux opérations combinatoires avec celles des paramètres  $n$  et  $p$ , nous nous retrouvons face à un chantier qui promet d'être à la fois complexe mais intéressant. Il est évident que son intérêt réside dans la détermination de tous les modèles de résolution que l'on puisse rendre compte relativement au champ conceptuel des dénombrements élémentaires afin de mieux maîtriser la conceptualisation qui en relève. Nous rejoignons de ce fait la préoccupation initiale de Dubois (1984).

## Bibliographie

- Armengaud, F. (1985). *La pragmatique*. Paris. Presse Universitaire de France.
- Austin, J. L. (1962). *How to Do Things with Words*. Oxford. Clarendon Press.
- Batanero, C., Godino, J. D., Navarro-Pelayo, V. (1997). Effect of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils. *Educational Studies in Mathematics*, 32 (181-199).
- Bertin, J. (1977). *La graphique et le traitement graphique de l'information*. Paris. Flammarion.
- Bosch, M., Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, Objet d'étude et problématique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Grenoble. La Pensée Sauvage. 19/1 (77-124).
- Brixhe, D. (1999). Construction d'un savoir dans l'interaction tutorielle. In M. Gilly, J.-P. Roux, A. Trognon. (Eds). *Apprendre dans l'interaction*. Nancy. Presse Universitaire de Nancy.
- Cheng, P. W., Holyoak, K. J. (1985). Pragmatic Reasoning Schemas. *Cognitive Psychology*. 17 (391-416).
- Cheng, P. W., Holyoak, K. J., Nisbett, R. E., Olivier, L. M. (1986). Pragmatic Versus Syntactic Approaches to Training Deductive Reasoning. *Cognitive Psychology*. 18 (293-328).
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. Grenoble. La Pensée Sauvage. 12/1 (73-112).
- Chevallard, Y. (1996). Les outils sémiotiques du travail mathématique. *Petit x*. IREM de Grenoble. 42 (33-57).
- Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In S. Maury, M. Caillot (Eds). *Rapport au savoir et didactique*. Paris. Fabert.

- Doise, W., Dionnet, S., Mugny, G. (1978). Conflit socio-cognitif, marquage social et développement cognitif. *Cahier de Psychologie*. 21 (231-243).
- Doise, W., Mugny, G. (1981). *Le développement social de l'intelligence*. Paris. Interéditions.
- Doise, W., Mugny, G. (1997). *Psychologie sociale et développement de l'intelligence*. Paris. Armand Colin.
- Douady, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse de doctorat d'Etat. Université Paris VII.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble. La Pensée Sauvage. 7/2 (5-31).
- Dubois, J.-G. (1984). Une systématique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*. 15 (37-57).
- Duval, R. (1988). Ecart sémantiques et cohérence mathématique : Introduction aux problèmes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Irem de Strasbourg. (7-25).
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne. Peter Lang.
- Ehrlich, S. (1990). *Sémantique et mathématique, apprendre /enseigner l'arithmétique simple*. Paris. Nathan.
- Evans, J., St. B. T., (1989), *Biases in Human Reasoning*. Hove and London. Lawrence Erlbaum.
- Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Dordrecht.
- Fischbein, E., Gazit, A., (1988). The Combinatorial Solving Capacity in Children and Adolescent. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 5 (193-198).
- Fischbein, E., Pampu, I., Minzat, I., (1970). Effects of age and instruction on combinatorial ability in children. *British Journal of Educational Psychology*. 261-270.
- Fischbein, E., Grossman, A. (1997). Schemata and Intuitions in Combinatorial Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*. 34 (27-47).

- Garfinkel, H. (1967). *Studies in Ethnomethodology*. Englewood Cliffs NJ. Prentice Hall.
- Ghiglione, R., Trogon, A., (1993). *Où va la pragmatique ? De la pragmatique à la psychologie sociale*. Grenoble. Presse Universitaire de Grenoble.
- Gilly, M., Fraisse, J., Roux, J. P. (1988). Résolution de problèmes en dyades et progrès cognitifs chez l'enfant de 11 à 13 ans. In A. N. Perret-Clermont, M. Nicolet (Eds). *Interagir et connaître : enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif*. Cousset, Delval.
- Giroto, V., Gilly, M., Blaye, A., Light, P. (1989). Plausibility of the Rules, Experience with the Rules, and Children's Performance in Selection Task. *British Journal of Psychology*. 80 (79-95).
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble. La Pensée Sauvage. 22/2.3 (237-284).
- Godino, J. D., Batanero, C. (1994). Significado personal e institucional de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14/3 (325-355).
- Godino, J. D., Batanero C. (1998). Clarifying the Meaning of Mathematical Objects as a Priority Area of Research in Mathematics Education. In A. Sierpiska, J. Kilpatrick (Ed.). *Mathematics Education as a Research Domain: A search for Identity*. Dordrecht. Kluwer. (177-95).
- Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. (2005). An Onto-Semiotic Analysis of Combinatorial Problems and the Solving Processes by University Students. *Educational Studies in Mathematics*. Springer. 60 (3-36).
- Houdé, O. (1995). *Rationalité, développement et inhibition. Un nouveau cadre d'analyse*. Paris, Presses Universitaires de France.
- Houdé, O. (2000a). Inhibition and Cognitive Development: Object, Number, Categorization, and Reasoning. *Cognitive Development*. 15 (63-73).
- Houdé, O. (2000b). Shifting from the Perceptual Brain to the Logical Brain. *Journal of Cognitive Neuroscience*. 12 (721-728).

- Janvier, C. (1993). Les graphes cartésiens : des traductions aux chroniques. In J. Baillé, S. Maury (Eds). *Les représentations graphiques dans l'enseignement et la formation*. Les Sciences de l'Education. 1-3 (17-37).
- Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses Universitaires de Rennes.
- Langouet, G., Porlier, J.-C. (1994). *Mesure et statistique en milieu éducatif*. Paris. ESF.
- Lemeignan, G., Weil-Barais, A. (1993). *Construire des concepts en physique*. Paris. Hachette Education.
- Lerouge, A. (1992). *Représentations cartésiennes, rationalité mathématique et rationalité du quotidien chez les élèves de collège*. Thèse de doctorat. Montpellier. Université de Montpellier II.
- Lerouge, A. (2000). Notion de cadre de rationalité à propos de la droite au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble. La Pensée Sauvage, 20/2 (171-208).
- Light, P., Blaye, A., Gilly, M., Girotto, V. (1989). Pragmatic Schemas and Logical Reasoning in 6- to 8-year-old Children, *Cognitive Development*. 4 (49-64).
- Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux en classe de mathématiques*. Grenoble. La Pensée sauvage.
- Maury, S. (1984). La quantification des probabilités : analyse des arguments utilisés par les élèves de la classe de seconde. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*. 5/2 (187-214).
- Maury, S. (1986). *Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problèmes*. Thèse d'État. Université Montpellier II.
- Maury, S. (2001). Didactique des mathématiques et psychologie cognitive : un regard comparatif sur trois approches psychologiques. *Revue Française de Pédagogie*. 13 (85-93).
- Maury, S., Caillot, M. (2003). *Rapport au savoir et didactiques*. Paris. Fabert.



- Maury, S., Fayol, M. (1986). Combinatoire et résolution de problèmes au cours moyen première et deuxième année. *Recherche en Didactiques des Mathématiques*. 7/1, (63-104).
- Mendelsohn, P. (1981). Analyse procédurales et analyse structurale des activités de permutations d'objets. *Archives de Psychologie*. 49 (171-197).
- Mugny, G. (1985). *Psychologie sociale du développement cognitif*. Berne, Peter Lang.
- Mugny, G., Doise, W. (1983). Le marquage social dans le développement cognitif. *Cahiers de Psychologie cognitive*. 3 (89-106).
- Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Thèse de Doctorat. Université de Grenade.
- Perret-Clermont, A. M. (1976). *L'interaction sociale comme facteur du développement cognitif*. Thèse de doctorat. Genève. Université de Genève.
- Perret-Clermont, A. M. (1979). *La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale*. Bern. Peter Lang.
- Piaget, J., Inhelder, B. (1951-1974). *La Genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris. Presses Universitaires de France.
- Richard, J.F. (1990). Compréhension de texte à visée pragmatique. In J.-F. Richard, C. Bonnet, R. Ghiglione. Traité de psychologie cognitive ; le traitement de l'information symbolique. Paris. Dunod.
- Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. Thèse de Doctorat. Université de Grenade.
- Roschelle, J., Teasley, S. (1995). The Construction of Shared Knowledge in Collaborative Problem Solving. In C. E. O'Malley (Ed.). *Computer-Supported Collaborative Learning*. Heidelberg. Springer-Verlag.
- Roulet, E., Auchlin, A., Moeschler, C., Rubatel, C., Schelling, M. (1985). *L'articulation du discours en français contemporain*. Berne. Peter Lang.
- Searle J. R, Vanderveken D. (1985). Foundations of Illocutionary Logic. *International Journal of Educational Research*. Cambridge. 13 (647-656).

- Trognon, A. (1993). La négociation du sens dans l'interaction. In J.-F. Halté (Ed.). *Inter-actions*. Metz. Centre d'analyse syntaxique de l'université de Metz.
- Trognon, A., Galimberti, C. (1996). La virtù della discussione libera nelle decisioni di gruppo. In C. Regalia, G. Scaratti (Eds.). *Conoscenza e azione nel lavoro sociale*. Roma. Armando.
- Trognon, A., Kostulski, K. (1996). L'analyse de l'interaction en psychologie des groupes : économie interne et dynamique des phénomènes groupaux. *Connexions*. 68 (73-115).
- Trognon, A., Larrue, J. (1994). *Pragmatique du discours politique*. Paris. Armand Colin.
- Vanderveken, D. (1988). *Les actes de discours*. Bruxelles. Mardaga.
- Vantourout, M. (2004). *Etude de l'activité et des compétences de professeurs des écoles et de professeurs de mathématiques dans des situation « simulées » d'évaluation à visée formative en mathématiques*. Thèse de Doctorat. Université Paris V – René Descartes.
- Vergnaud, G. (1987). Les fonctions de l'action et de la symbolisation dans la formation des connaissances chez l'enfant. In J. Piaget, P. Mounoud, L. P. Bronckart. Psychologie. Encyclopédie de la Pleiade XLVI. Paris. Gallimard. (821-844).
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. 10/2-3 (133-170).
- Vergnaud, G., Cohen, R. (1969). Sur l'activité combinatoire des enfants de 8 ans. *Psychologie française*. 14/4 (321-332).
- Vygotsky, L. S. (1985/1934). *Pensée et langage*. Paris. Editions Sociales.
- Wason, P. C. (1966). Reasoning. In B. FOSS (Ed.). *New Horizons in Psychology*. Harmondsworth. Penguin Book.
- Wason, P. C. (1968). Reasoning About a Rule. *Quarterly Journal of Psychology*. 20 (273-281).
- Weil-Barais, A. & al. (2005) *L'homme cognitif*. Paris. Quadrige. Presses Universitaires de France.

- Weil-Barais, A. Dumas-Carré, A. (1998). *Tutelle et médiation dans l'éducation scientifique*. Berne, Berlin, New York. Peter Lang.
- Wertsch, J. V. (1979). The Regulation of Human Action and the Given-New Organization of Private Speech. In G. Zivin (Ed.). *The Development of Self-Regulation Through Private Speech*. New York. John Wiley & Sons.
- Wilson, D., Sperber, D. (2004). Relevance Theory. In G. Ward, L. Horn (Eds). *Handbook of Pragmatics*. Oxford. Blackwell.
- Zhou, R. M. (1987). *Marquage social, conduites de partage et construction de la notion de conservation chez l'enfant de 5-6 ans*. Thèse de doctorat. Aix-en-Provence. Université de Provence.
- Zhou, R. M. (1988). Normes égalitaires, conduites sociales de partage et acquisition de la conservation des qualités. In A. N. Perret-Clermont, M. Nicolet (Eds). *Interagir et connaître : enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif*. Cousset. Delval.

# Liste des tableaux, figures et exemples

## Liste des tableaux

Tableau I : Distribution de notre échantillon selon les différentes modalités de l'épreuve « Devoir sur table ».	48
Tableau II : Distribution des procédures pour chaque modèle combinatoire implicite sur l'ensemble des réponses.	90
Tableau III : Distribution des réponses selon chaque modèle combinatoire implicite pour l'ensemble des réponses.	92
Tableau IV : Distribution des réponses selon chaque modèle combinatoire implicite (épreuve 4-20).	92
Tableau V : Distribution des réponses selon chaque modèle combinatoire implicite (épreuve 20-4).	93
Tableau VI : Distribution des réponses à $n=4$ selon chaque modèles combinatoires implicites.	93
Tableau VII : Distribution des réponses selon chaque modèle combinatoire implicite	94
Tableau VIII : Distribution des réponses selon chaque modèle combinatoire implicite	94
Tableau IX : Distribution des réponses à $n=20$ selon chaque modèles combinatoires implicites.	95
Tableau X : Distribution des réponses selon chaque modèle combinatoire implicite	95
Tableau XI : Distribution des réponses selon chaque modèle combinatoire implicite	96
Tableau XII : Barème de notation.	109
Tableau XIII : Scores moyens généraux (sur 8).	109
Tableau XIV : Scores moyens pour $n=4$ (sur 3).	110
Tableau XV : Scores moyens pour $n=20$ (sur 5).	110
Tableau XVI : Comparaison deux à deux des modalités du facteur modèle combinatoire implicite (ensemble des réponses).	113
Tableau XVII : Comparaison deux à deux des modalités du facteur modèle combinatoire implicite ( $n=4$ ).	113
Tableau XVIII : Comparaison deux à deux des modalités du facteur modèle combinatoire implicite ( $n=20$ ).	113
Tableau XIX : Répartition des procédures selon les différents problèmes $A_{slt}$ .	116
Tableau XX : Répartition des procédures selon les différents problèmes $A_{sgm}$ .	119
Tableau XXI : Répartition des procédures selon les différents problèmes Dis.	123
Tableau XXII : Répartition des procédures selon les différents problèmes Par.	127
Tableau XXIII : Répartition des procédures selon les différents problèmes Sél.	130
Tableau XXIV : Variation des réponses en 4-20 pour chaque modèle combinatoire implicite.	139
Tableau XXV : Variation des réponses en 20-4 pour chaque modèle combinatoire implicite.	139
Tableau XXVI : Pourcentages des différentes formes de progrès selon les modalités de passation.	143
Tableau XXVII : Analyse de contenu du protocole 01 (association – salutations).	180
Tableau XXVIII : Ensemble des assertions associées à chaque procédure.	209
Tableau XXIX : Répartition des élèves selon l'évolution des réponses qu'ils proposent.	220

Tableau XXX : Scores moyens généraux (sur 8).	272
Tableau XXXI : Scores moyens pour $n=4$ (sur 3).	272
Tableau XXXII : Scores moyens pour $n=20$ (sur 5).	272
Tableau XXXIII : Test de Levene d'homogénéité des variances intra-groupes	273
Tableau XXXIV : Critère de regroupement : le facteur modèles combinatoires implicites.	274
Tableau XXXV : Critère de regroupement : le facteur ordre de résolution des problèmes.	274
Tableau XXXVI : Test de significativité relatif aux données de rang du facteur « ordre de résolution des problèmes » (4-20 et 20-4).	275
Tableau XXXVII : Test de significativité relatif aux données de rang du facteur modèles combinatoires implicites.	275
Tableau XXXVIII : Test T2 de Tamhane de comparaisons des données par paires entre les différentes modèles combinatoires implicites (en gras, les différences significatives de score).	276
Tableau XXXIX : Comparaison deux à deux des modalités du facteur modèle combinatoire implicite (ensemble des réponses).	277
Tableau XL : Comparaison deux à deux des modalités du facteur modèle combinatoire implicite ( $n=4$ ).	277
Tableau XLI : Comparaison deux à deux des modalités du facteur modèle combinatoire implicite ( $n=20$ ).	277

## Liste des figures

Figure 1 : Réseau rectiligne et réseau circulaire.	53
Figure 2 : Scores moyens pour chaque configurations combinatoires et selon l'ordre de résolution des problèmes ( $n=4$ ).	110
Figure 3 : Scores moyens pour chaque configurations combinatoires et selon l'ordre de résolution des problèmes ( $n=20$ ).	111
Figure 4 : Schématisation des modèles de résolution relatifs au protocole 01 (Association – salutations).	206
Figure 5 : Modélisation générale des réponses pertinentes et non pertinentes relatives aux problèmes posés à l'épreuve « Atelier de résolution ».	217
Figure 6 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 02 – Partition.	285
Figure 7 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 03 – Distribution.	286
Figure 8 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 04 – Sélection.	286
Figure 9 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 05 – Association (segments).	286
Figure 10 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 06 – Sélection.	287
Figure 11 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 07 – Distribution.	288
Figure 12 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 08 – Association (segments).	288
Figure 13 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 09 – Partition.	289
Figure 14 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 10 – Associations (salutations).	289
Figure 15 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 12 – Distribution.	290
Figure 16 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 13 – Sélection.	291

Figure 17 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 14 – Associations (salutations).....	291
Figure 18 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 15 – Associations (salutations).....	292
Figure 19 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 16 – Partition. ....	292
Figure 20 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 17 – Association (salutations).....	293
Figure 21 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 18 – Association (segments).....	293
Figure 22 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 19 – Sélection. ....	294
Figure 23 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 19 – Partition. ....	295
Figure 24 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 21 – Sélection. ....	296
Figure 25 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 22 – Distribution. ....	296
Figure 26 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 23 – Associations (salutations).....	296
Figure 27 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 24 – Partition. ....	297
Figure 28 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 25 – Sélection. ....	297

## Liste des exemples

Exemple 1 : Elève 057, problème Par 4-20 $n=4$ .....	50
Exemple 2 : Elève 148, problème Par 20-4 $n=4$ .....	51
Exemple 3 : Elève 157, problème Sél 4-20, $n=4$ .....	51
Exemple 4 : Elève 151, problème Sél 4-20 $n=4$ .....	52
Exemple 5 : Elève 100, problème $A_{slt}$ 20-4 $n=4$ .....	52
Exemple 6 : Elève 217, problème $A_{slt}$ 20-4 $n=4$ .....	54
Exemple 7 : Elève 154, problème Sél 4-20 $n=4$ .....	55
Exemple 8 : Elève 228, problème $A_{sgm}$ 4-20 $n=4$ .....	55
Exemple 9 : Elève 195, problème Dis 4-20, $n=4$ .....	56
Exemple 10 : Elève 134, problème Dis 20-4 $n=4$ .....	56
Exemple 11 : Elève 264, problème Par 4-20 $n=4$ .....	56
Exemple 12 : Elève 284, problème Sél 4-20 $n=4$ .....	57
Exemple 13 : Elève 038, problème Dis 4-20 $n=4$ .....	58
Exemple 14 : Elève 311, problème Dis 20-4 $n=4$ .....	58
Exemple 15 : Elève 073, problème Par 20-4 $n=4$ .....	60
Exemple 16 : Elève 100, problème $A_{slt}$ 20-4 $n=20$ .....	61
Exemple 17 : Elève 015, problème $A_{slt}$ 20-4 $n=20$ .....	62
Exemple 18 : Elève 125, problème Dis 4-20 $n=4$ .....	64
Exemple 19 : Elève 144, problème Par 20-4 $n=4$ .....	65
Exemple 20 : Elève 036, problème $A_{sgm}$ 20-4 $n=20$ .....	65
Exemple 21 : Elève 129, problème Dis 4-20 $n=4$ .....	67
Exemple 22 : Elève 036, problème $A_{sgm}$ 20-4 $n=4$ .....	67
Exemple 23 : Elève 301, problème $A_{slt}$ , 4-20 $n=4$ .....	68
Exemple 24 : Elève 025, problème $A_{sgm}$ 4-20 $n=4$ .....	69
Exemple 25 : Elève 245, problème Dis 4-20, $n=4$ .....	69
Exemple 26 : Elève 245, problème Dis 4-20 $n=20$ .....	70

Exemple 27 : Elève 001, problème A <sub>slt</sub> 4-20 $n=4$ .....	72
Exemple 28 : Elève 061, problème Par 4-20 $n=20$ .....	72
Exemple 29 : Elève 154, problème Sél 4-20 $n=20$ .....	73
Exemple 30 : Elève 012, problème A <sub>slt</sub> 20-4 $n=20$ .....	73
Exemple 31 : Elève 199, problème Par 4-20 $n=4$ .....	74
Exemple 32 : Elève 002, problème A <sub>slt</sub> 4-20 $n=20$ .....	74
Exemple 33 : Elève 143, problème Par 4-20 $n=4$ .....	75
Exemple 34 : Elève 118, problème A <sub>sgm</sub> 20-4 $n=20$ .....	75
Exemple 35 : Elève 035, problème A <sub>sgm</sub> 20-4 $n=20$ .....	76
Exemple 36 : Elève 039, problème Dis 4-20 $n=20$ .....	76
Exemple 37 : Elève 033, problème A <sub>sgm</sub> 20-4 $n=20$ .....	76
Exemple 38 : Elève 075, problème Par 20-4 $n=4$ .....	77
Exemple 39 : Elève 024, problème A <sub>sgm</sub> 20-4 $n=20$ .....	77
Exemple 40 : Elève 055, problème Par 4-20 $n=4$ .....	78
Exemple 41 : Elève 007, problème A <sub>slt</sub> 4-20 $n=4$ .....	79
Exemple 42 : Elève 081, problème Sél 4-20 $n=20$ .....	80
Exemple 43 : Elève 040, problème Dis 4-20 $n=20$ .....	81
Exemple 44 : Elève 033, problème A <sub>sgm</sub> 20-4 $n=4$ .....	81
Exemple 45 : Elève 300, problème A <sub>slt</sub> 4-20 $n=4$ .....	82
Exemple 46 : Elève 027, A <sub>sgm</sub> 20-4 $n=20$ .....	83
Exemple 47 : Elève 052, problème Dis 20-4.....	84
Exemple 48 : Elève 115, problème A <sub>sgm</sub> 20-4 $n=4$ .....	85
Exemple 49 : Elève 039, problème Dis 4-20 $n=4$ .....	85
Exemple 50 : Elève 193, problème A <sub>sgm</sub> 20-4 $n=4$ .....	85
Exemple 51 : Elève 094, problème A <sub>slt</sub> 4-20 $n=4$ .....	86
Exemple 52 : Elève 122, problème Dis 4-20 $n=4$ .....	86
Exemple 53 : Elève 070, problème Par 20-4 $n=20$ .....	87
Exemple 54 : Elève 117, problème A <sub>sgm</sub> 20-4 $n=20$ .....	87
Exemple 55 : Elève 308, problème Dis 4-20 $n=4$ .....	88
Exemple 56 : Elève 266, problème Par 4-20 $n=20$ .....	88
Exemple 57 : Elève 063, problème Par 4-20 $n=4$ .....	89
Exemple 58 : Elève 317, problème Sél 4-20 $n=4$ .....	89
Exemple 59 : Elève 104, problème A <sub>slt</sub> 20-4 $n=4$ .....	102
Exemple 60 : Elève 041, problème Dis 4-20 $n=20$ .....	104
Exemple 61 : Elève 073, problème Par 20-4 $n=20$ .....	105
Exemple 62 : Elève 286, problème Sél 4-20 $n=20$ .....	106
Exemple 63 : Elève 220, problème Sél 4-20 $n=20$ .....	106
Exemple 64 : Elève 096, problème A <sub>slt</sub> 4-20 $n=4$ .....	107
Exemple 65 : Elève 096, problème A <sub>slt</sub> 4-20 $n=20$ .....	107
Exemple 66 : Elève 009, problème A <sub>slt</sub> 4-20 $n=4$ .....	108
Exemple 67 : Elève 009, problème A <sub>slt</sub> 4-20 $n=20$ .....	108
Exemple 68 : Elève 303, problème A <sub>slt</sub> 20-4 $n=20$ .....	117
Exemple 69 : Elève 112, problème A <sub>sgm</sub> 4-20 $n=20$ .....	120
Exemple 70 : Elève 112, problème A <sub>sgm</sub> 4-20 $n=4$ .....	120

Exemple 71 : Elève 225, problème $A_{sgm}$ 4-20 $n=20$ .....	121
Exemple 72 : Elève 306, problème $A_{sgm}$ 4-20 $n=20$ .....	121
Exemple 73 : Elève 306, problème $A_{sgm}$ 4-20 $n=4$ .....	122
Exemple 74 : Elève 309, problème Dis 20-4 $n=20$ .....	124
Exemple 75 : Elève 038, problème Dis 4-20 $n=4$ .....	124
Exemple 76 : Elève 249, problème Dis 4-20 $n=4$ .....	125
Exemple 77 : Elève 041, problème 4-20 $n=4$ .....	126
Exemple 78 : Elève 072, problème Par 20-4 $n=20$ .....	128
Exemple 79 : Elève 142, problème Par 4-20 $n=4$ .....	128
Exemple 80 : Elève 082, problème Sél 4-20 $n=20$ .....	131
Exemple 81 : Elève 077, problème Sél 4-20 $n=20$ .....	131
Exemple 82 : Elève 314, problème Sél 4-20 $n=20$ .....	132
Exemple 83 : Elève 161, problème Sél 20-4 $n=4$ .....	132
Exemple 84 : Elève 152, problème Sél 4-20 $n=20$ .....	132
Exemple 85 : Elève 162, problème Sél 20-4 $n=20$ .....	133
Exemple 86 : Elève 293, problème Sél 20-4 $n=20$ .....	134
Exemple 87 : Elève 319, problème Sél 20-4 $n=20$ .....	135
Exemple 88 : Elève 237, problème $A_{sgm}$ , 20-4 $n=20$ .....	228



# ANNEXES

## Indications aux professeurs ayant fait passer l'épreuve « Devoir sur table ».

Le but de cette expérimentation est de repérer les types de raisonnements que les élèves mettent en oeuvre dans la résolution de certains problèmes de dénombrement.

### **Mise en oeuvre**

Chaque élève doit travailler sur un "cahier" de 2 feuilles (un exercice par feuille). Il y a dix cahiers différents répartis dans le paquet à distribuer.

**Attention ! Il ne faut pas toucher à l'ordre des cahiers dans le paquet : distribuez-les comme ils viennent, un par élève.**

Lisez les consignes (ci-dessous) aux élèves puis distribuez les cahiers.

Récupérez les cahiers au fur et à mesure que les élèves ont terminé. La durée de ce travail ne devrait pas dépasser 20 min. Au delà, ramassez les cahiers restants.

Bien entendu, **il ne faut rien dire aux élèves concernant les exercices** afin de ne pas induire chez eux des procédures de résolution particulières.

**Consignes** : ce que le professeur doit **uniquement** dire aux élèves

- Vous allez participer à une expérimentation. Les personnes qui m'ont demandé ce travail s'intéressent à la façon dont les élèves cherchent la solution de problèmes mathématiques. Ce travail ne sera pas noté.

- Il vous faudra résoudre seul les deux exercices qui figurent sur le cahier que je vais vous distribuer (*le professeur montre un des cahiers*).

- Commencez par résoudre l'exercice de la première page **sans lire celui de la deuxième page** (*le professeur montre la première page et la seconde page*).

- Quand vous aurez **fini** le premier exercice, tournez **complètement** la page... (*Le professeur montre la manipulation de manière à ce que la première page du cahier coïncide avec la dernière*)... et passez au second exercice. **Vous ne devez pas revenir sur le premier exercice.**

Il est **très important** que vous répondiez très clairement et que vous **justifiez bien** votre réponse... (*Le professeur répète*)... **Il est important de bien justifier.**

- Travaillez au stylo bille et sans calculatrice.

- N'utilisez pas de brouillon. Si vous vous trompez, ne faites pas disparaître votre travail mais entourez ce qui vous paraît faux... (*Le professeur répète...*) **Entourez ce qui est faux sans le faire disparaître.**

- Dès que c'est **fini**, rendez votre travail. Vous avez 20 minutes.

---

*Je vous remercie infiniment pour votre aide. Si vous le désirez, je pourrai ultérieurement vous informer des résultats de l'expérimentation (elle porte sur environ 300 élèves et il faut compter un délai d'un an).*

## Analyses statistiques

L'ensemble des données recueillies (cf. sous III. 4.) présente des variations selon les deux facteurs : « ordre de résolution des problèmes » et « modèles combinatoires implicites ». Les trois tableaux suivants présentent les scores moyens ainsi obtenus selon un plan qui croise les modalités des deux facteurs. Ils concernent d'abord l'épreuve générale, puis les problèmes  $n=4$ , puis  $n=20$ .

**Tableau XXX : Scores moyens généraux (sur 8).**

Modèles combinatoires implicites	$A_{slt}$	$A_{sgm}$	Dis	Par	Sél	$m_i$
Ordre de résolution						
4-20	3,53	2,91	2,62	1,35	1,65	2,40
20-4	3,20	2,41	0,66	1,66	0,42	1,67
$m_j$	3,37	2,65	1,69	1,50	1,02	2,04

**Tableau XXXI : Scores moyens pour  $n=4$  (sur 3).**

Modèles combinatoires implicites	$A_{slt}$	$A_{sgm}$	Dis	Par	Sél	$m_i$
Ordre de résolution						
4-20	2,09	2,16	1,70	1,09	0,94	1,61
20-4	1,57	1,50	0,52	1,03	0,24	0,97
$m_j$	1,84	1,82	1,18	1,06	0,58	1,29

**Tableau XXXII : Scores moyens pour  $n=20$  (sur 5).**

Modèles combinatoires implicites	$A_{slt}$	$A_{sgm}$	Dis	Par	Sél	$m_i$
Ordre de résolution						
4-20	1,44	0,75	0,04	0,26	0,71	0,80
20-4	1,63	1,03	1,14	0,63	0,18	0,72
$m_j$	1,53	0,89	0,51	0,44	0,44	0,76

Il est nécessaire de vérifier la significativité des différences de moyennes observées entre chacune de leurs modalités. Le test d'usage pour des variables qualitatives

comme nos facteurs expérimentaux est l'analyse de la variance. Ce test paramétrique demande certaines conditions d'utilisation, en particulier l'homogénéité des variances entre les différents échantillons constitutifs du plan factoriel. Pour vérifier cette homogénéité, nous procédons à la mise en œuvre du test de Levene (proposé par le logiciel SPSS).

$H_0$  : la variance intra-groupes relative aux scores moyens ne varie pas de façon significative entre les groupes.

**Tableau XXXIII : Test de Levene d'homogénéité des variances intra-groupes**

	F	ddl1	ddl2	Signification
$n=4$	12,025	9	309	,000
$n=20$	8,267	9	309	,000
Ensemble des réponses	7,017	9	309	,000

Aux seuils  $P=.05$  et  $P=.01$ ,  $H_0$  est rejeté (la signification est largement inférieure à  $P$ ). Au moins un des groupes présente une variance significativement différente de celles des autres.

Il n'est donc pas possible d'effectuer une analyse de la variance sur nos données. Nous avons donc recours à un test non paramétrique<sup>39</sup>, le H de Kruskal-Wallis (proposé par le logiciel SPSS). Il s'agit d'une généralisation du test de Man et Whitney à un nombre quelconque d'échantillons<sup>40</sup>. Les scores sont remplacés par les rangs obtenus pour l'ensemble des échantillons. Il porte donc sur des données de rang et correspond au F de Snedecor. Sa puissance est voisine de 95% par rapport à l'analyse paramétrique de la variance. Les rangs moyens obtenus par les différentes modalités des deux facteurs sont présentés par le Tableau XXXIV le Tableau XXXV. La variable H de Kruskal-Wallis suit une loi du  $X^2$  à  $k-1$  degrés de libertés ; la significativité de la variation entre les échantillons est donc déterminée par ce test (Tableau XXXVI et Tableau XXXVII).

<sup>39</sup> Nous ne pourrions étudier l'éventuel effet lié à l'interaction des deux facteurs.

<sup>40</sup> Cf. Langouet et Porlier, 1994, p.137-141.

**Tableau XXXIV : Critère de regroupement : le facteur modèles combinatoires implicites.**

		N	Rang moyen
<i>n=4</i>	<i>A<sub>slt</sub></i>	62	192,62
	<i>A<sub>sgm</sub></i>	66	192,20
	Dis	61	152,54
	Sél	66	149,06
	Par	64	113,58
	Total	319	
<i>n=20</i>	<i>A<sub>slt</sub></i>	62	206,57
	<i>A<sub>sgm</sub></i>	66	178,28
	Dis	61	142,89
	Sél	66	138,71
	Par	64	134,29
	Total	319	
Ensemble des réponses	<i>A<sub>slt</sub></i>	62	210,67
	<i>A<sub>sgm</sub></i>	66	185,76
	Dis	61	145,21
	Sél	66	143,92
	Par	64	115,45
	Total	319	

**Tableau XXXV : Critère de regroupement : le facteur ordre de résolution des problèmes.**

		N	Rang moyen
<i>n=4</i>	4-20	161	180,18
	20-4	158	139,43
	Total	319	
<i>n=20</i>	4-20	161	164,43
	20-4	158	155,49
	Total	319	
Ensemble des réponses	4-20	161	177,81
	20-4	158	141,85
	Total	319	

$H_0$  : les dix échantillons sont extraits de la même population parente ; les moyennes de rang obtenues dans les dix échantillons ne diffèrent pas significativement.

Nous allons à présent étudier les résultats des tests de significativité, d'abord pour le facteur « ordre de résolution des problèmes » (cf. Tableau XXXVI), puis pour le facteur « modèles combinatoires implicites » (cf. Tableau XXXVII).

**Tableau XXXVI : Test de significativité relatif aux données de rang du facteur « ordre de résolution des problèmes » (4-20 et 20-4).**

	<i>n</i> =4	<i>n</i> =20	Ensemble des réponses
H	18,402	1,042	13,451
ddl	1	1	1
Signification asymptotique	,000	,307	,000

$X^2_{lu}$  pour 1 ddl : 3,84 (P=.05) et 6,64 (P=.01).  $H_0$  rejeté sauf pour  $n=20$ .

**Tableau XXXVII : Test de significativité relatif aux données de rang du facteur modèles combinatoires implicites.**

	<i>n</i> =4	<i>n</i> =20	Ensemble des réponses
H	39,417	40,371	47,114
ddl	4	4	4
Signification asymptotique	,000	,000	,000

$X^2_{lu}$  pour 4 ddl : 9,49 (P=.05) et 13,29 (P=.01).  $H_0$  rejeté pour les trois scores moyens. Au moins un des échantillons présente une donnée de rang significativement différente de celle des autres. Il y a donc lieu de les comparer 2 à 2. Pour cela, nous procédons au test T2 de Tamhane proposé par le logiciel SPSS (Tableau XXXVIII). Ce test est fondé sur le « t » de Student et s'applique en cas de non homogénéité des variances intra-groupes, ce qui est le cas ici. Nous avons mis en gras les valeurs pour lesquelles les moyennes de rang des deux échantillons comparés sont significativement différentes au seuil P=.05.

**Tableau XXXVIII : Test T2 de Tamhane de comparaisons des données par paires entre les différentes modèles combinatoires implicites (en gras, les différences significatives de score).**

Modèles combinatoires implicites		Significations		
		n=4	n=20	Ensemble des épreuves
A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	1,000	,126	,584
	Dis	,059	<b>,001</b>	<b>,001</b>
	Par	<b>,003</b>	<b>,000</b>	<b>,000</b>
	Sél	<b>,000</b>	<b>,000</b>	<b>,000</b>
A <sub>sgm</sub>	A <sub>slt</sub>	1,000	,126	,584
	Dis	,133	,525	,156
	Par	<b>,014</b>	,173	<b>,017</b>
	Sél	<b>,000</b>	,227	<b>,000</b>
Dis	A <sub>slt</sub>	,059	<b>,001</b>	<b>,001</b>
	A <sub>sgm</sub>	,133	,525	,156
	Par	1,000	1,000	1,000
	Sél	,099	1,000	,517
Par	A <sub>slt</sub>	<b>,003</b>	<b>,000</b>	<b>,000</b>
	A <sub>sgm</sub>	<b>,014</b>	,173	<b>,017</b>
	Dis	1,000	1,000	1,000
	Sél	,179	1,000	,781
Sél	A <sub>slt</sub>	<b>,000</b>	<b>,000</b>	<b>,000</b>
	A <sub>sgm</sub>	<b>,000</b>	,227	<b>,000</b>
	Dis	,099	1,000	,517
	Par	,179	1,000	,781

Le Tableau X, le Tableau XI et le Tableau XII présentent de manière simplifiée ces données. Nous considérons comme significatives des valeurs comprises entre .05 (inclus) et .01 (exclu) et comme très significatives toute valeur inférieure à cet intervalle. Au dessus de .05, les valeurs ne sont plus interprétées comme significatives.

**Tableau XXXIX : Comparaison deux à deux des modalités du facteur modèle combinatoire implicite (ensemble des réponses).**

	A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	Dis	Par	Sél
A <sub>slt</sub>	-	nS	TS	TS	TS
A <sub>sgm</sub>	nS	-	nS	S	TS
Dis	TS	nS	-	nS	nS
Par	TS	S	nS	-	nS
Sél	TS	TS	nS	nS	-

(TS : très significatif ; S : significatif ; nS : non significatif)

**Tableau XL : Comparaison deux à deux des modalités du facteur modèle combinatoire implicite ( $n=4$ ).**

	A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	Dis	Par	Sél
A <sub>slt</sub>	-	nS	nS	TS	TS
A <sub>sgm</sub>	nS	-	nS	S	TS
Dis	nS	nS	-	nS	nS
Par	TS	S	nS	-	nS
Sél	TS	TS	nS	nS	-

(TS : très significatif ; S : significatif ; nS : non significatif)

**Tableau XLI : Comparaison deux à deux des modalités du facteur modèle combinatoire implicite ( $n=20$ ).**

	A <sub>slt</sub>	A <sub>sgm</sub>	Dis	Par	Sél
A <sub>slt</sub>	-	nS	TS	TS	TS
A <sub>sgm</sub>	nS	-	nS	nS	nS
Dis	TS	nS	-	nS	nS
Par	TS	nS	nS	-	nS
Sél	TS	nS	nS	nS	-

(TS : très significatif ; S : significatif ; nS : non significatif)



## Réponses fausses – autres relevées à l'épreuve « Devoir sur table »

### - Association – salutations

- **Protocoles 4-20**

- « Il y a 4 saluts qui sont échangés en tout entre ces 4 personnes parce qu' [il y a] un salut par personne et comme il y en a 4. » (094)

- **Protocoles 20-4**

- Absence de réponse. (103)
- « 4 saluts peuvent être échangés » (166)
- « 4 personnes → 4 saluts (enfin, peut être pas car il se serrent la main de la main droite et il y a des gauchers.) » (016)
- $2 \times 4 = 8$  (105) (168) (191)

- **Protocoles 20-4**

- Absence de réponse. (103)
- Réponse incohérente. (223)
- « 20 saluts sont échangés, chaque personne serrant la main de chaque autre personne. » (166)
- « Il y en a 40 car les personnes sont pas 2 et si on additionne le nombre de [?] le tout x2 donc on multiplie 20 par 2. » (105) (168)

- **Protocoles 4-20**

- « Il y aura 30 saluts car  $20 + 20/2 = 30$  » (189)
- Absence de réponse. (207)
- $20 \times 3 = 60$  salutations

- *« Il y a 20 saluts qui sont échangés en tout entre ces 20 personnes parce qu'un salut par personne et il y en a 20 personnes. »* (094)
- $2 \times 20 = 40$  salutations (énumération circulaire avec appariements ordonnés ? cf. 211). (001) (003) (210)

## **- Association – segment**

- **Protocoles 4-20**
- **Protocoles 20-4**
  - Absence de réponse. (103)
  - *« On peut trouver 8 segments »* (172)
- **Protocoles 20-4**
  - *« On peut tracer 40 segments car il y a deux extrémités. Par conséquent, il faut multiplier par 2. »* (117)
  - *« On peut tracer 40 points entre chaque segment. »* (119)
- **Protocoles 4-20**
  - Absence de réponse. (020) (111)
  - *« On peut faire 420 segments, parce que c'est comme ça. »* (229)
  - *« On peut en tracer 70 »* (230)
  - *« 40 segments peuvent être tracés avec 20 points. »* (233)

## **- Distribution**

- **Protocoles 4-20**
  - *« [...] 4 cases  $\times$  2 jetons = 8 placements. »* (308) (175 ?)
  - *« Il y a 2 déplacements possibles. Ils sont effectués en diagonale parce qu'une case = à 2 jetons. »* (252)

- *« S'il faut 2 jetons sur 2 cases, cela signifie qu'il faut doubler les jetons par 2 pour 4 cases. Il y a donc 4 jetons pour 4 cases. » (253) (122)*

- **Protocoles 20-4**

- *« Une fois car il reste 2 cases. » (047)*
- *Absence de réponse. (135) (066)*
- *2 x 2 = 4 placements. (177)*
- *« 4 placements sont possibles » (049)*
- *« Puisqu'en premier, il y a 20 cases et il y a 20 placements, et là, 4 cases, il y a donc 4 cases [placement ?]. » (051) (261)*
- *« Il y a 4 placements possibles en tout sur cette grille de 4 cases en comptant le 1<sup>er</sup> placement. » (261)*

- **Protocoles 20-4**

- *Absence de réponse. (135)*
- *« Je pense qu'il y a 20 placements possibles car 1x20 = 20. » (049)*
- *« On peut faire 20 déplacements. » (257)*
- *« On peut faire 20 placements possibles en comptant le 1<sup>er</sup> placement » (261)*
- *« Sur cette grille de 20 cases, on peut faire 20 placements car on les place par 2. Donc, il y a 20 déplacements. » (310)*
- *« 2 jetons multipliés par 20 cases. 2x20 = 40. On a fait 40 placements puisque l'on place 2 jetons dans chaque case et qu'il y a 20 cases. Ce qui fait au total 40 jetons qui sont placés dans la grille de 20 cases. » (260)*

- *« 18 placements car si la grille comprend 20 cases et qu'il y a dessus 2 jetons, donc il reste 18 placements possibles différents. »*  
(130)

- **Protocoles 4-20**

- Absence de réponse. (247) (175)
- $20 \times 2 = 40$ ,  $40 - 2 = 38$ . (248)
- $20 \times 2$ . (308)
- 18 placements. (123)

## **- Partition**

- **Protocoles 4-20**

- *« Ils feront 4 parties de gendarmes et de voleurs pour qu'ils soient tous tombés entre eux. »* (179)
- *« Il est possible de répartir les enfants en 4 car ils sont 4. Chacun peut avoir un rôle qui lui appartient. »* (266)
- 3 répartitions possibles : 3 voleurs contre 1 gendarme ou 2 voleurs contre 2 gendarmes ou 1 voleur contre 3 gendarmes. (139) (059) (063)
- *« Il peut y avoir 3 répartitions différentes possibles. »* (198)

- **Protocoles 20-4**

- *« Je ne comprends pas. »* (066)
- *« Avec ces 5 enfants, on peut faire 5 répartitions différentes. »*  
(181)
- *« On peut faire 38 ~~équipes~~ parties. »* (277)
- *« ~~3 parties sont possibles~~. 3 répartitions différentes sont possibles. »* (279)
- *« Il y a 2 répartitions possibles : 1 et 2, 2 et 2. »* (149)

- 3 répartitions possibles : 3 voleurs contre 1 gendarme ou 2 voleurs contre 2 gendarmes ou 1 voleur contre 3 gendarmes. (278)
- **Protocoles 20-4**
  - Absence de réponse. (066)
  - « On peut faire qu'une équipe de voleur et 10 parties de gendarmes.  $2 \times 10 = 20$ ,  $20 : 18 = 1, \dots$  » (074)
  - « 9 » (201)
  - « On peut faire 19 répartitions possibles car on ne peut pas en mettre 0 dans un groupe et 20 dans l'autre » (278)
  - « Il y a 40 répartitions possibles car chaque enfant passe 2 fois dans la même équipe et c'est comme ça. » (277)
  - « Avec 20 enfants, 18 répartitions différentes sont possibles car : on prend 2 du groupe des voleurs et on les met dans le groupe des gendarmes et on reprend les 2 autres gendarmes. Et vice versa. » (280)
- **Protocoles 4-20**
  - Absence de réponse. (263) (267)
  - 22 répartitions possibles avec ces 20 enfants. (056)
  - « Il peut y en avoir 2 car le temps n'est pas justifié. » (138)
  - « Ils peuvent changer 17 fois d'équipe en ayant des équipes différentes. » (198)
  - « On a 20 possibilités de répartitions. » (199)
  - « 20 répartitions car chacun aura sa répartition. » (058)
  - « 20 répartitions différentes : 20 enfants, 2 G et 18 V,  $18 V + 2 G = 20$  enfants. » (063)
  - « Ils feront 20 parties de gendarmes et de voleurs pour qu'ils tombent avec leur camarade. » (060)

- *« Il y aura 40 match (jeux) car  $2 \times 20 = 40$  et il faut que tous les enfants passent gendarme. » (060)*
- *« Chaque enfant passera une fois gendarme et une fois voleur. Donc  $2 \times 20 = 40$  répartitions différentes possibles. » (143)*
- *$2 \times 20 = 40$  équipes. (265)*
- *? (062)*
- *« Il y a plusieurs possibilité car : 1 équipe de 10 gendarmes et 1 équipe de 10 voleurs ou 1 équipe de 5 gendarmes et 1 équipe de 15 voleurs. » (136)*
- *« On peut les répartir 40 fois : 17 G et 3 V, 16 G et 4 V, etc. » (139) (266)*
- *« Il peut y avoir 18 répartitions. » (140)*

## **- Sélection**

### **• Protocoles 4-20**

- *« On ne peut faire qu'une seule équipe de gendarmes (1 équipe de 3 ou 2 ou encore d'1 gendarme) car il faut au moins 1 voleur. » (317) (079) (155) (203) (287) (314) (186)*
- *« Il est possible d'avoir 2 équipes avec 4 enfants : 2 équipes d'1 personne, 2 équipes de 2 personnes. » (202)*

### **• Protocoles 20-4**

- *« Une équipe » (159)*

### **• Protocoles 20-4**

- *« Il ne peut pas y avoir 20 enfants qui font les gendarmes. Il doit y en avoir à peu près 15 gendarmes et 5 voleurs sinon ils ne pourront pas jouer aux gendarmes et aux voleurs. Mais s'il y a 20 enfants gendarmes, il y aura 2 équipes de gendarmes. » (160)*

- *« 20 - 2 = 18. Il faut 18 équipes différentes de gendarmes possibles car il y a 20 enfants et dans une équipe, il faut 2 gendarmes. » (297)*

- **Protocoles 4-20**

- $2 \times 40 = 80$  équipes différentes. (076)
- *« Il y en aura 30. » (151)*
- Absence de réponse. (284) (315)
- *« Il est possible d'avoir 2 équipes : 2 équipes de 10 personnes ; 2 équipes, une de 5 et une autre de 15 personnes. » (317)*
- *« Il peut y avoir : 18 équipes de 2 gendarmes, 18 équipes de 2 gendarmes et 1 équipe d'un gendarme, 1 équipe de 2 gendarmes et 1 équipe de 17 gendarmes, 1 équipe de 2 gendarmes plus 1 équipe de 4 gendarmes, plus 1 équipe de 13 gendarmes, et plein encore. » (317)*
- *« Il faut 18 équipes. » (078)*

## Modélisations des échanges résolutifs relatifs à chacun des protocoles

Pour faciliter la lecture de ces figures, les procédures sont écrites en gras. Elles sont reliées aux assertions par des flèches (en cas de justification) ou des lignes pointillées terminées par des points (en cas de réfutation). Pour distinguer les deux ensembles de signification en concurrence, nous avons mis dans les différentes vignettes ce qui concerne un traitement partitif de la situation sur fond blanc cerné de gris et ce qui relève d'une activité combinatoire sur fond gris entouré de blanc. Nous avons laissé en blanc les assertions que l'on ne peut associer à une procédure particulière. Les numéros entre parenthèse renvoient aux répliques du protocole. Nous avons mis entre guillemets et en italique les énoncés des élèves que nous n'avons pu décontextualiser, parce que très ancrés dans la sémantique de l'énoncé. La modélisation du protocole 01 est présentée sous IV. 3. B. c. *p*

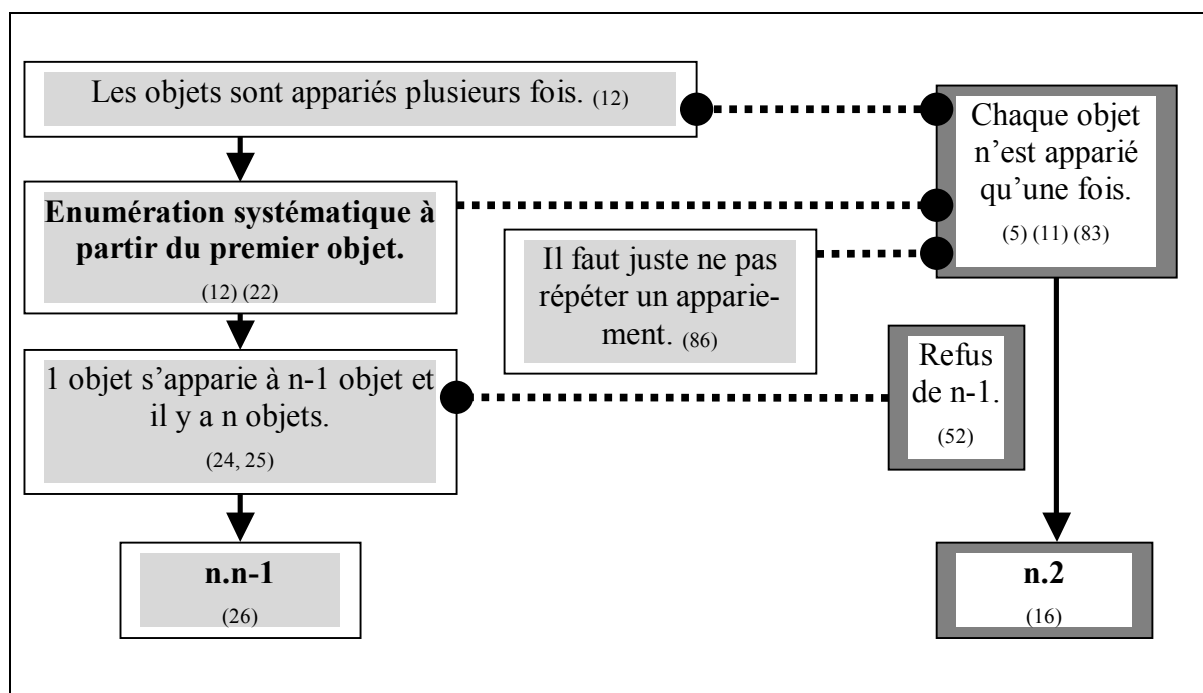


Figure 6 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 02 – Partition.



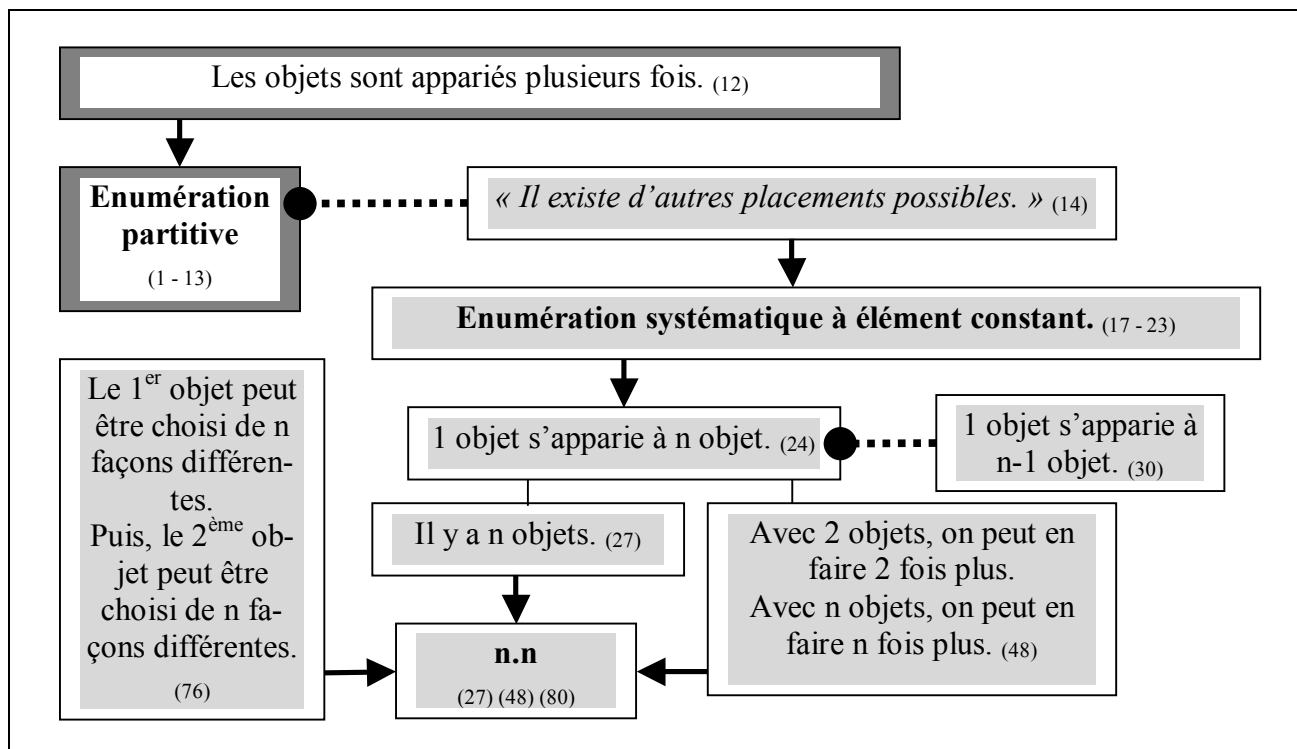


Figure 7 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 03 – Distribution.

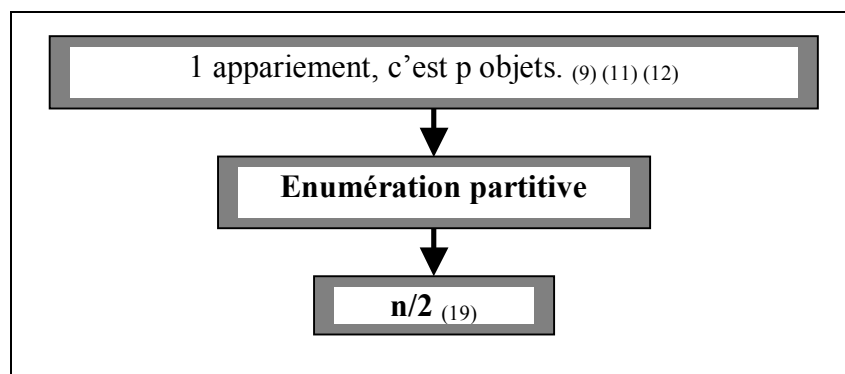


Figure 8 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 04 – Sélection.

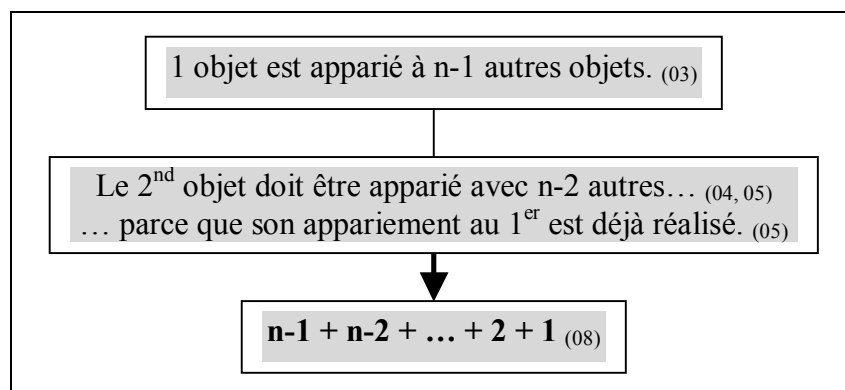


Figure 9 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 05 – Association (segments).

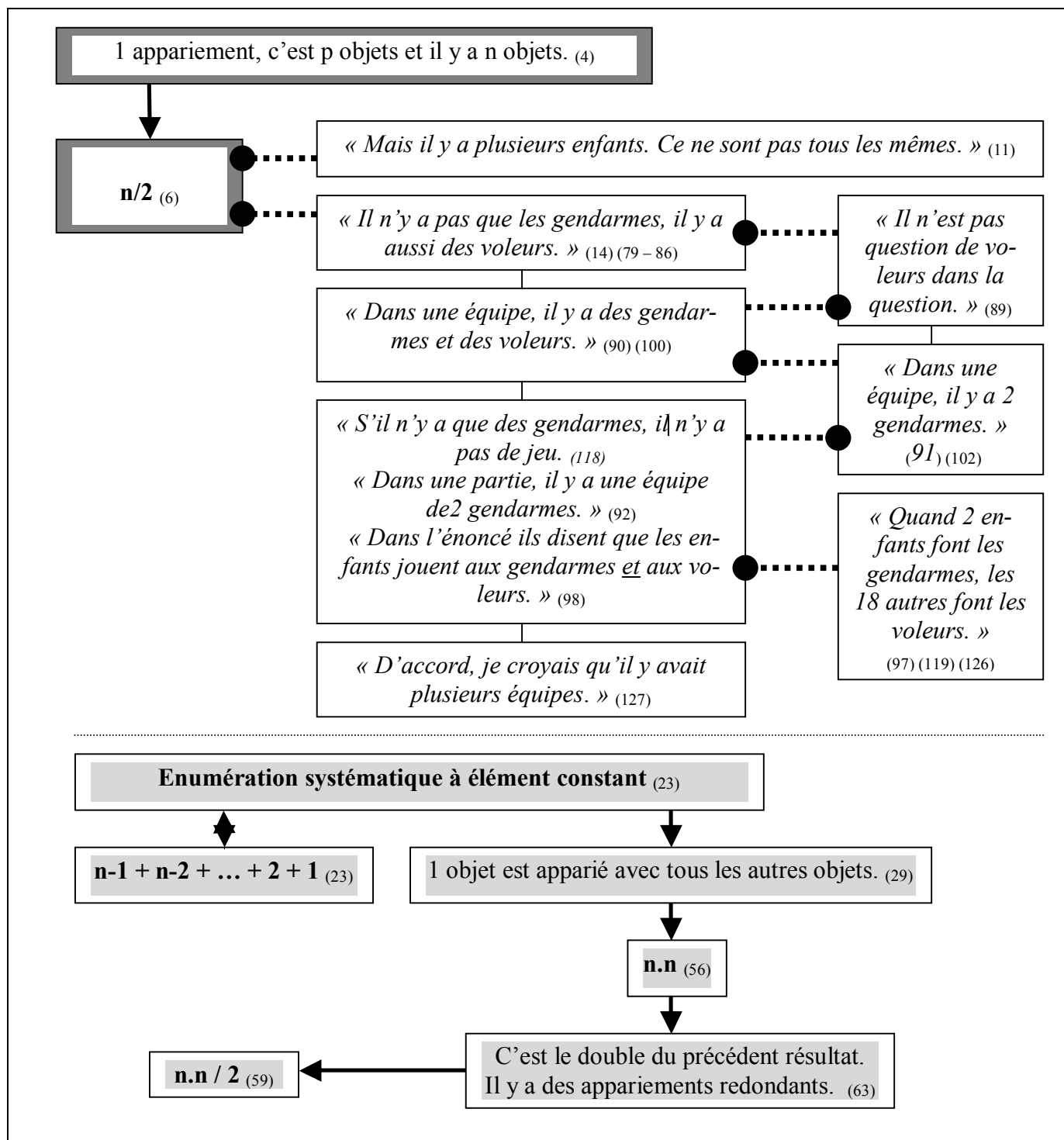


Figure 10 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 06 – Sélection.

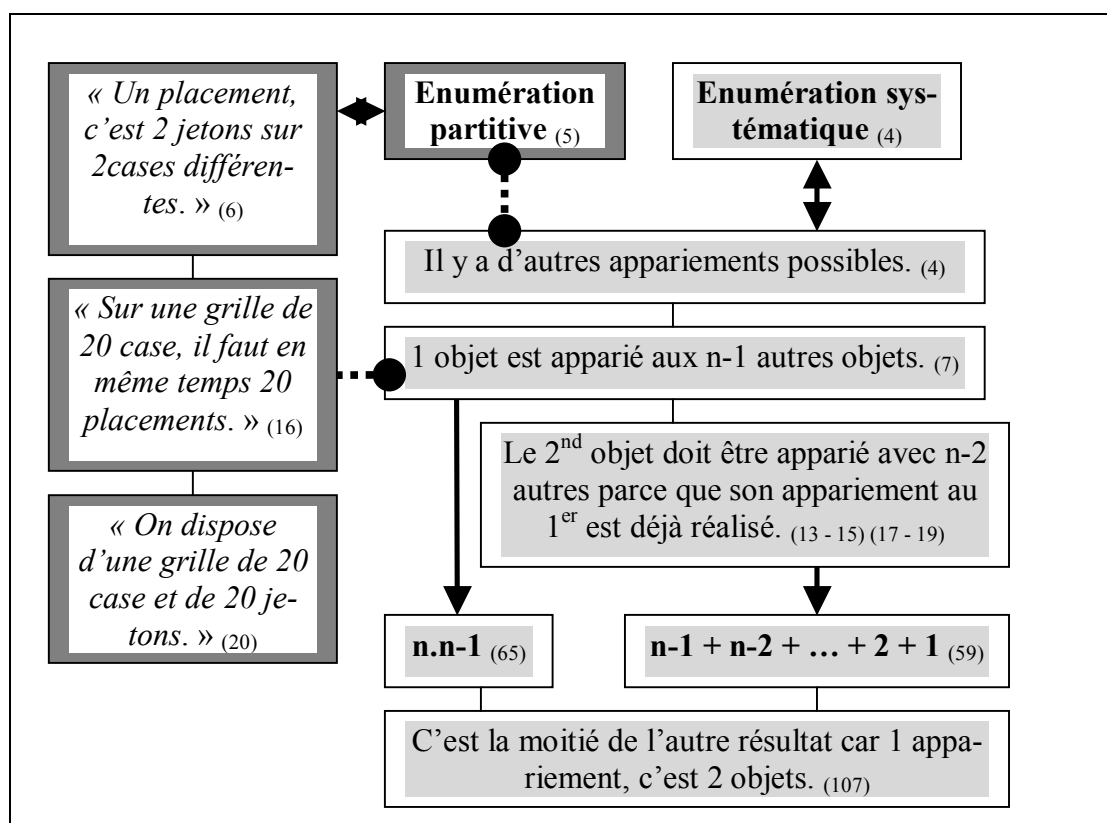


Figure 11 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 07 – Distribution.

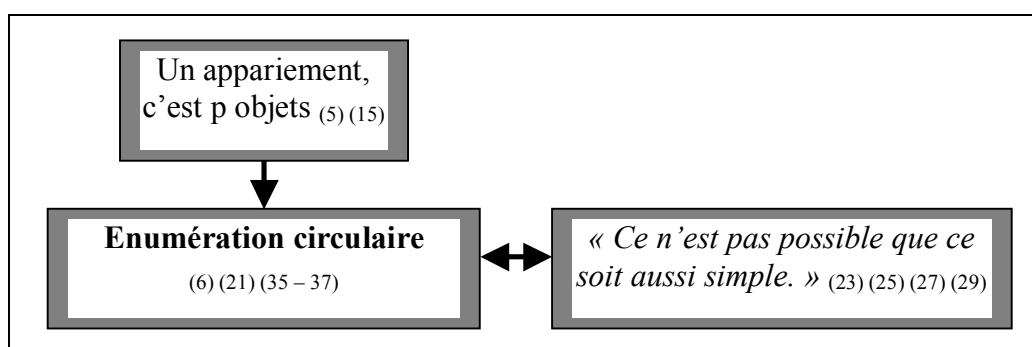


Figure 12 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 08 – Association (segments).

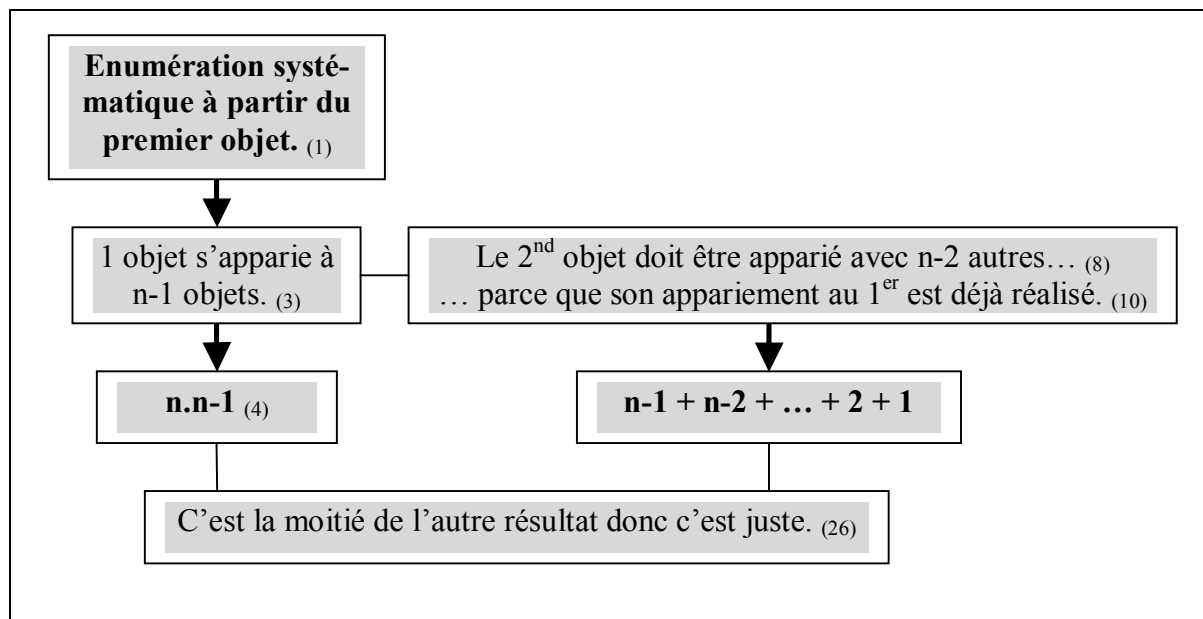


Figure 13 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 09 – Partition.

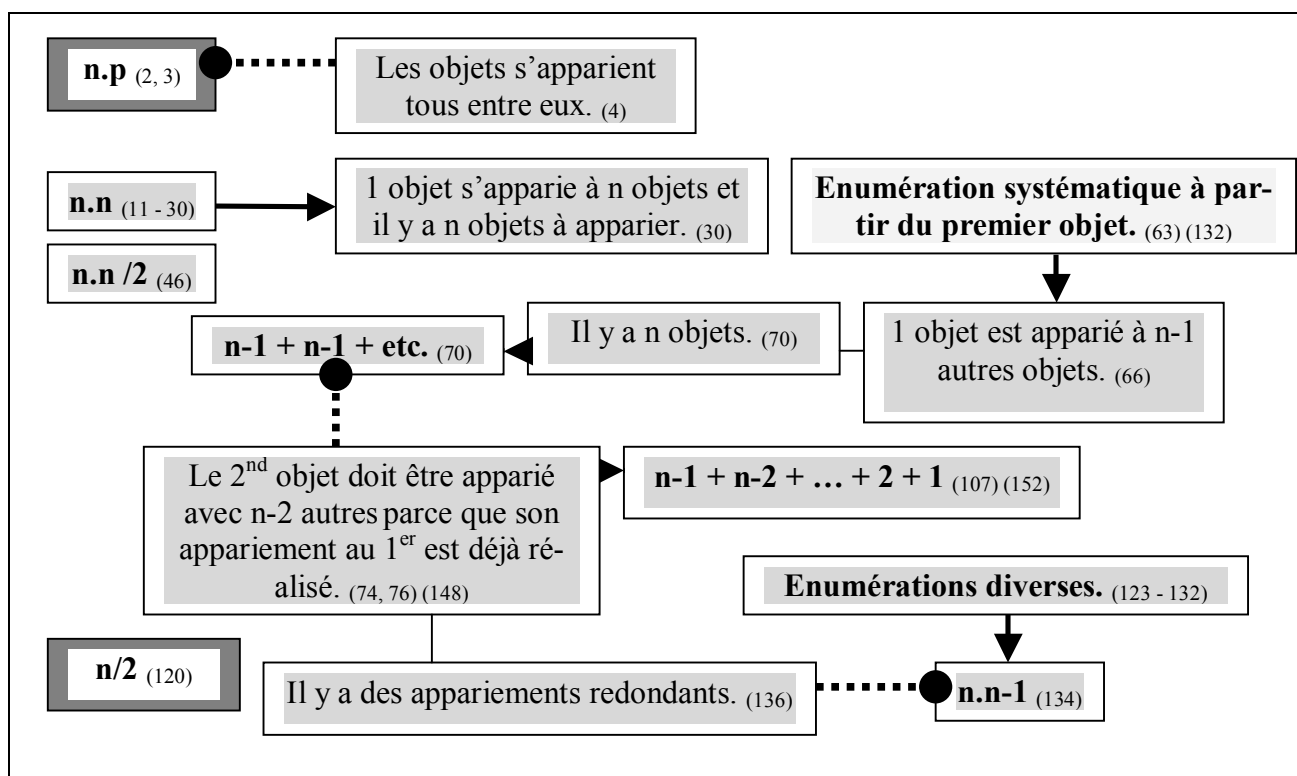


Figure 14 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 10 – Associations (salutations).

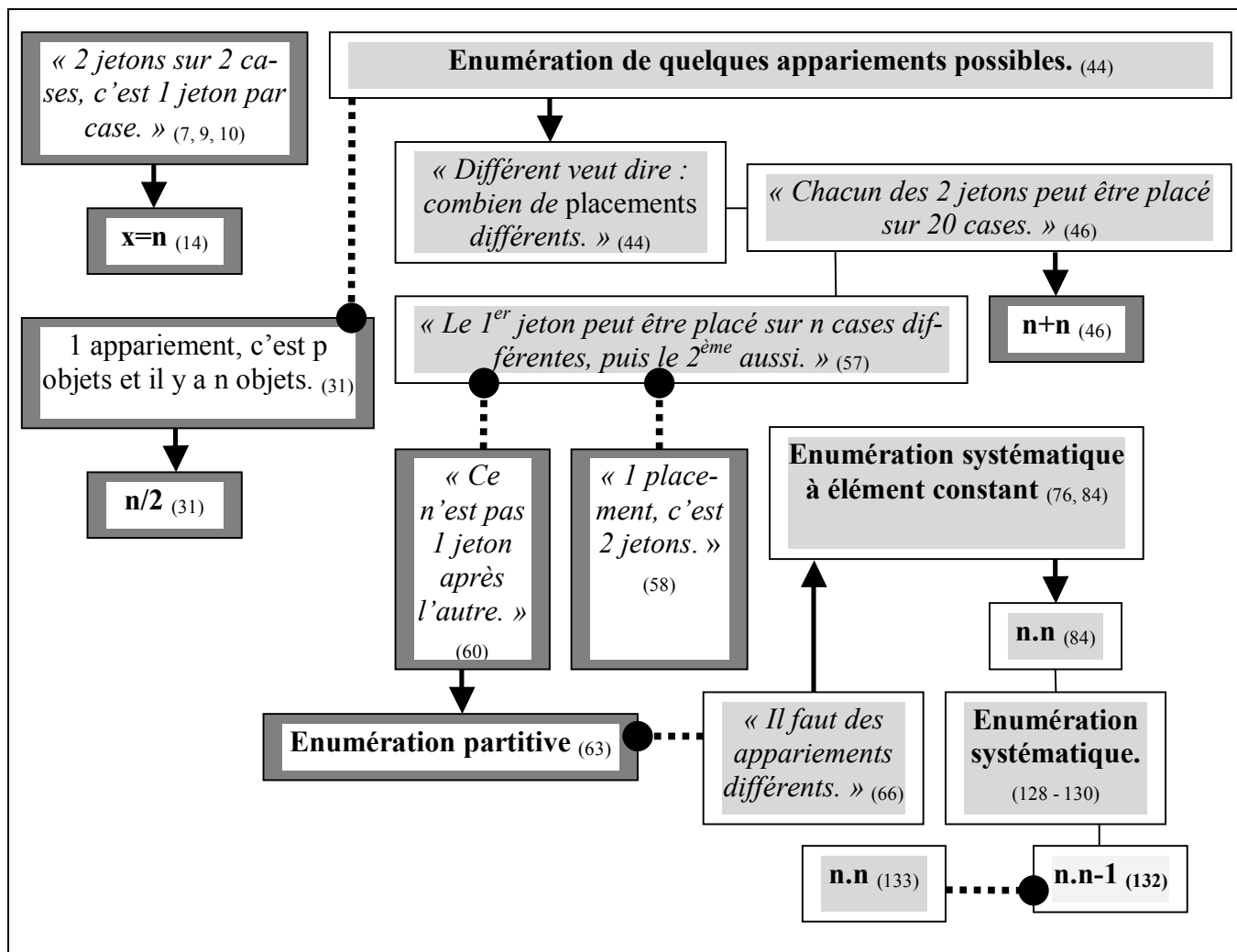


Figure 15 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 12 – Distribution.

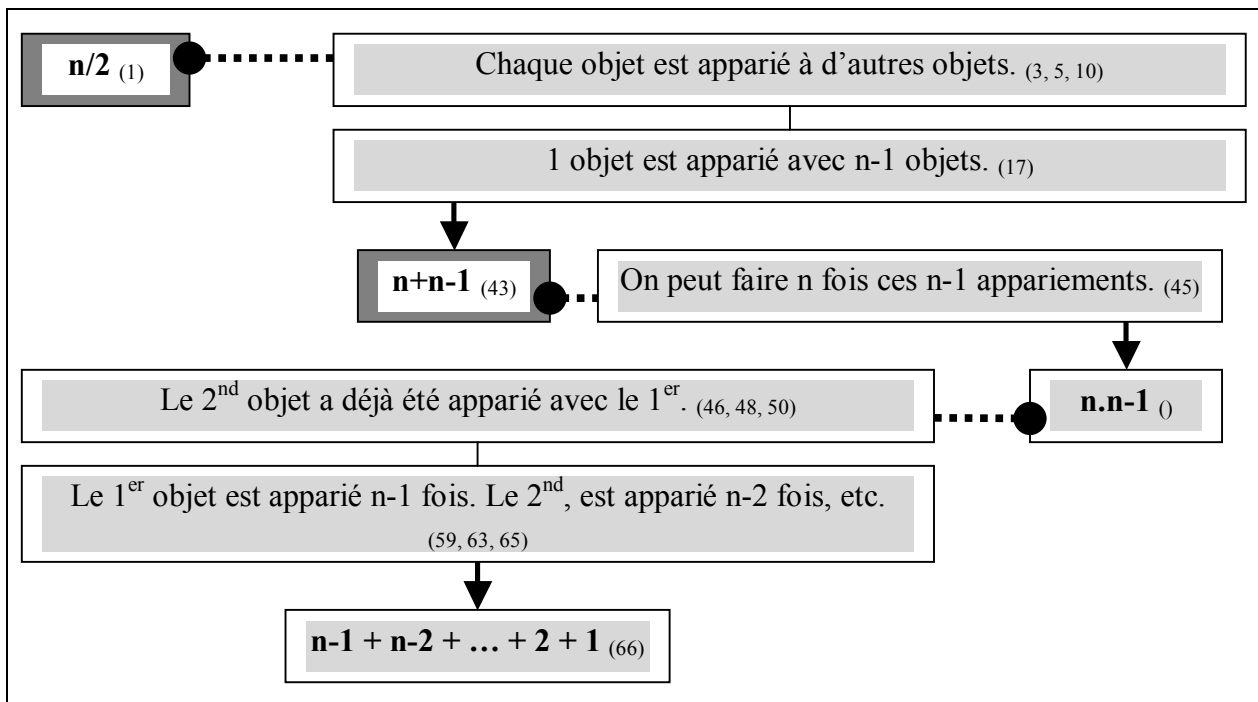


Figure 16 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 13 – Sélection.

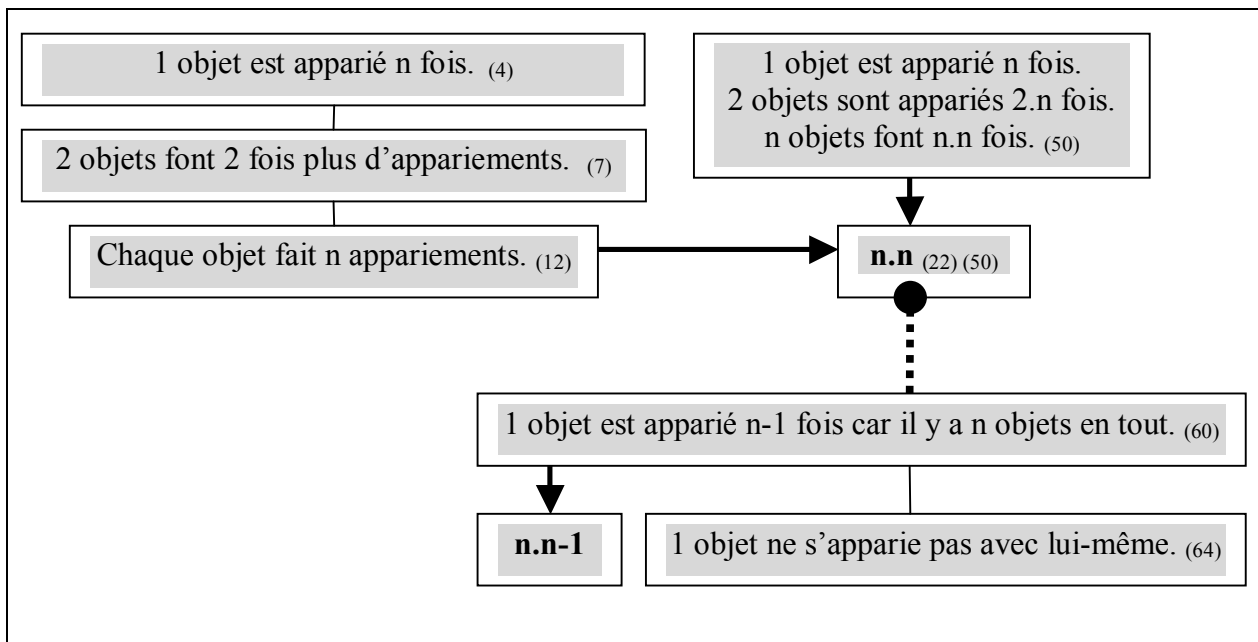


Figure 17 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 14 – Associations (salutations).

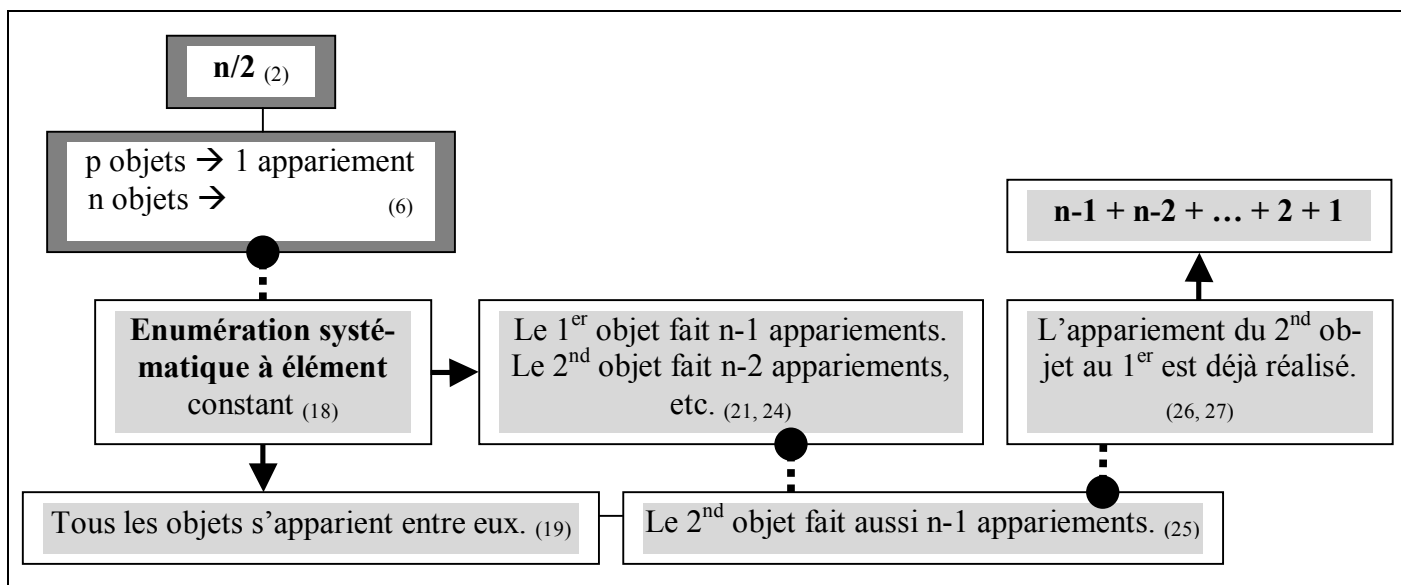


Figure 18 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 15 – Associations (salutations).

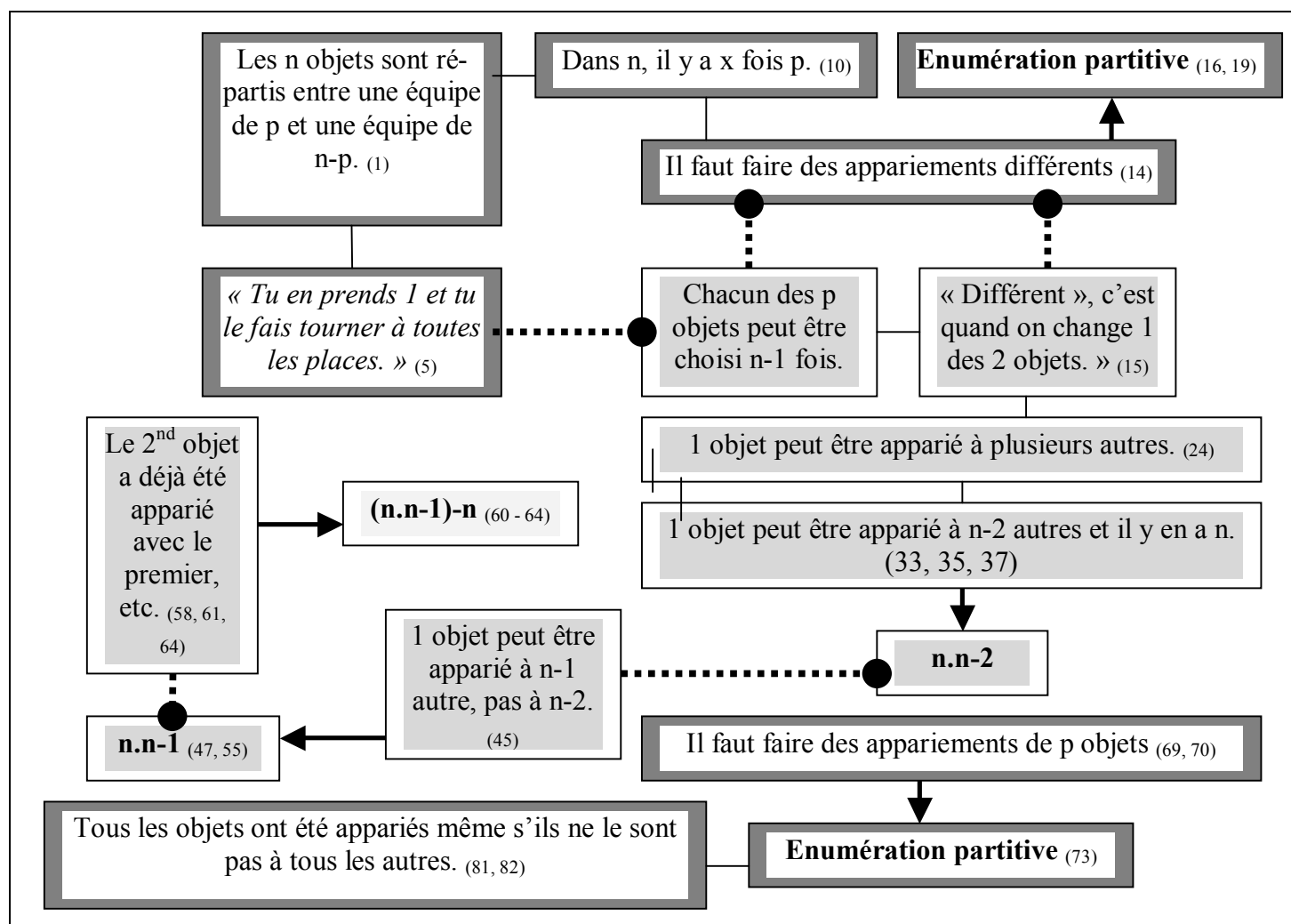


Figure 19 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 16 – Partition.

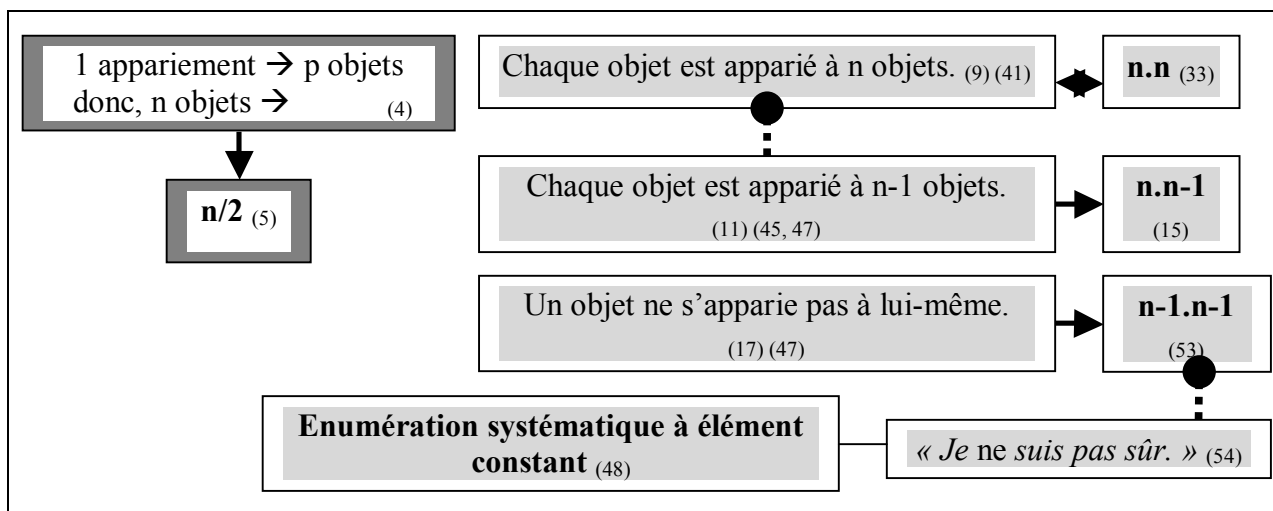


Figure 20 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 17 – Association (salutations).

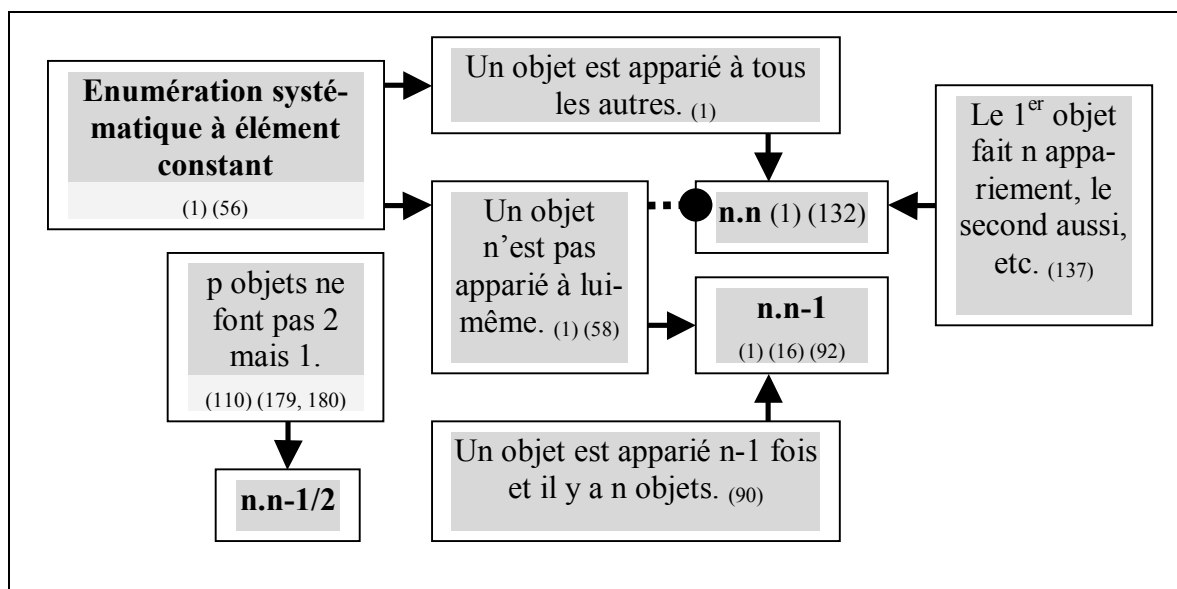


Figure 21 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 18 – Association (segments).



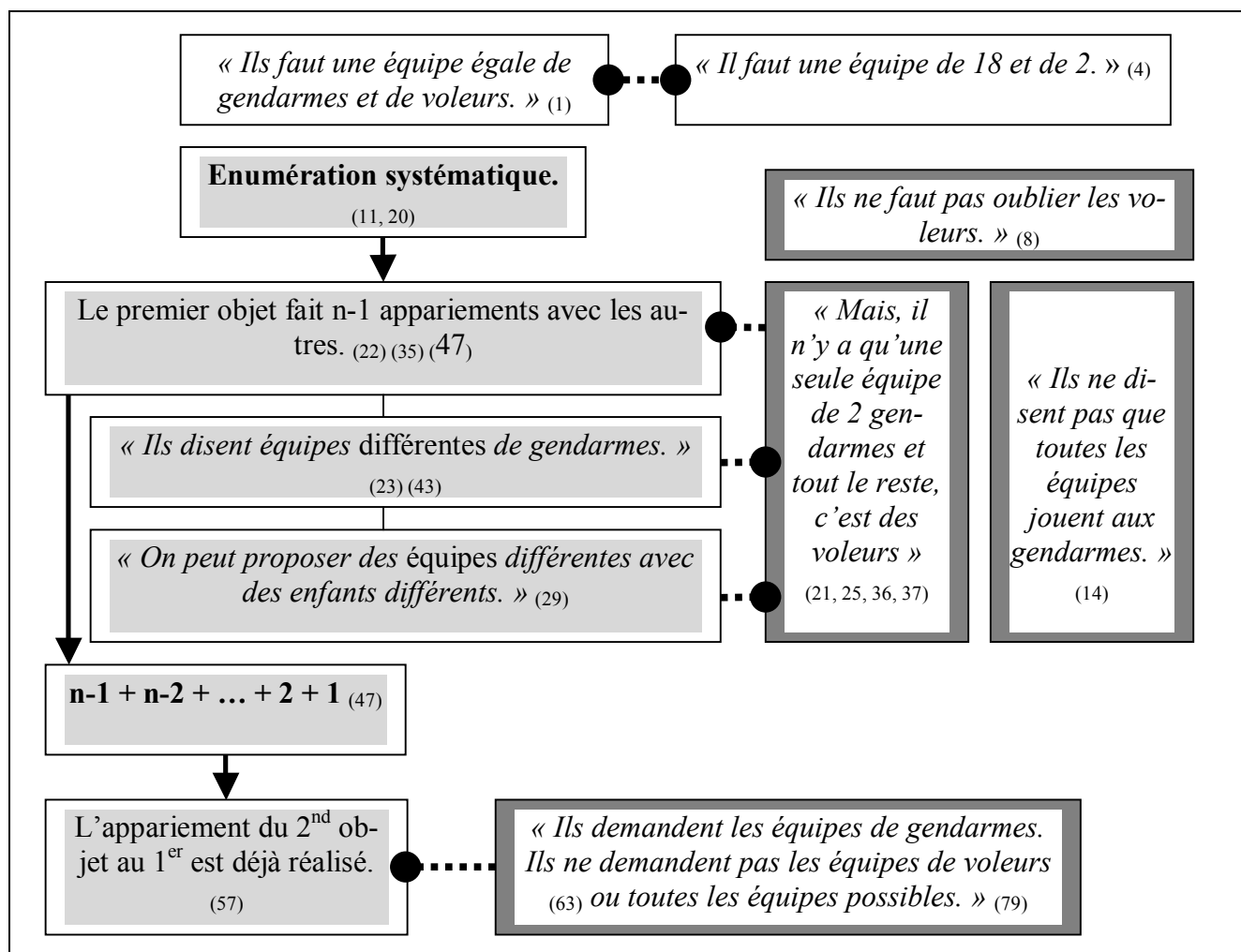


Figure 22 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 19 – Sélection.

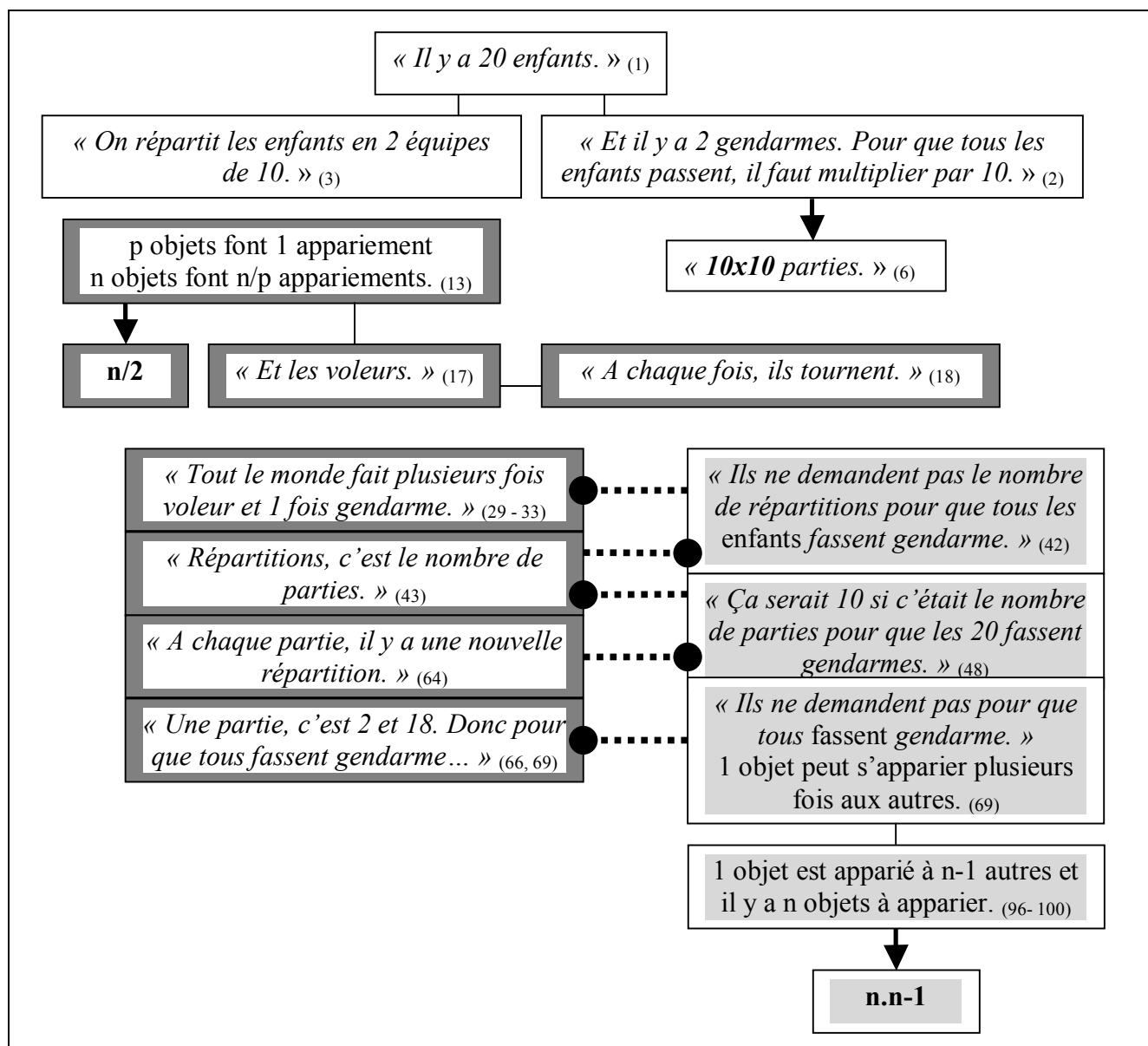


Figure 23 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 19 – Partition.

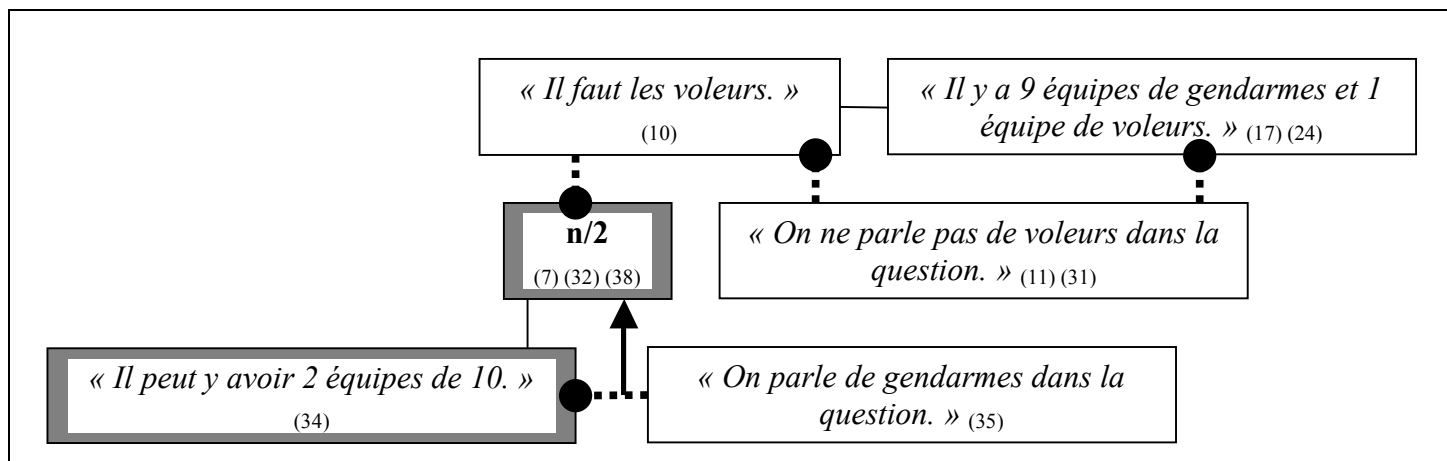


Figure 24 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 21 – Sélection.

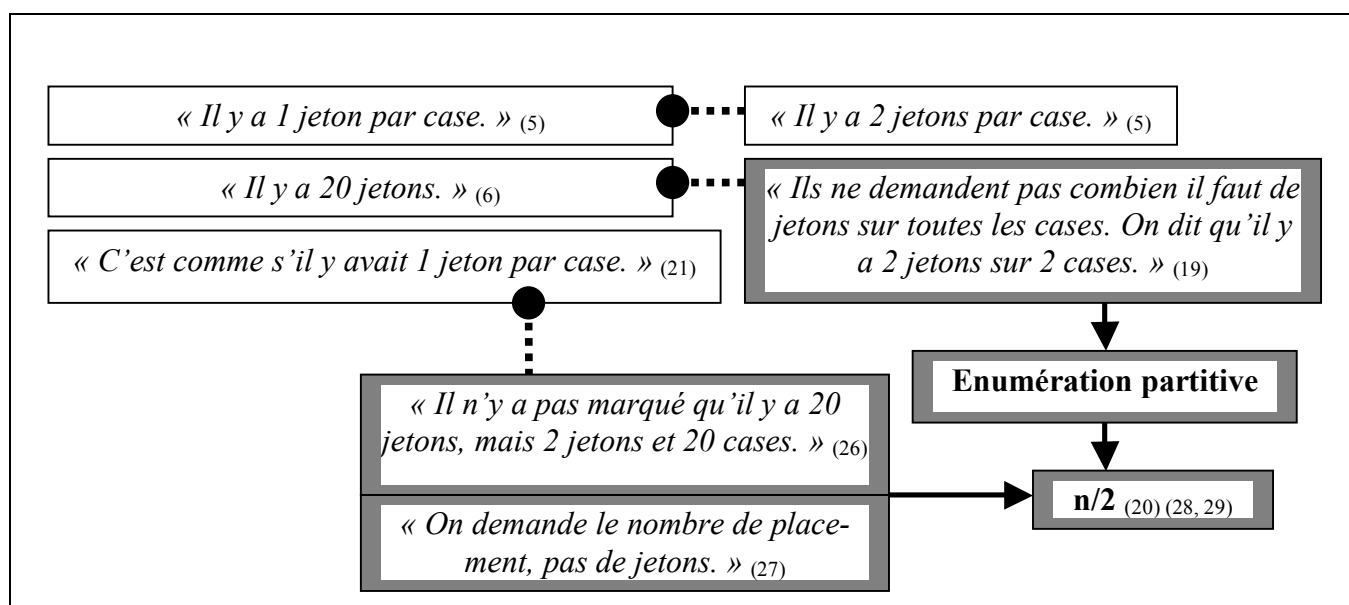


Figure 25 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 22 – Distribution.

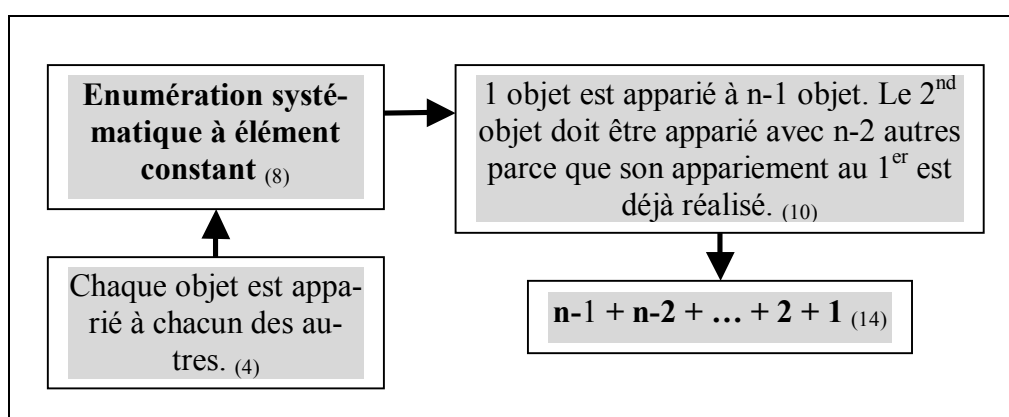


Figure 26 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 23 – Associations (salutations).

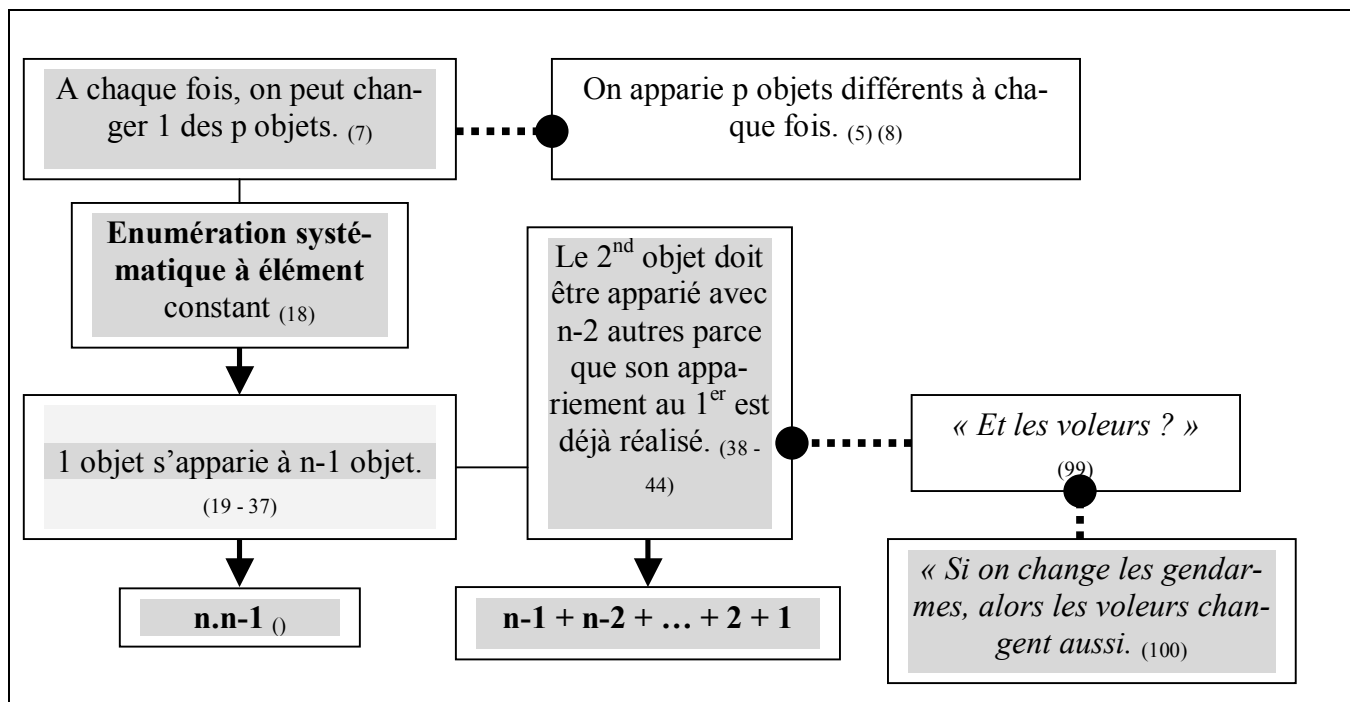


Figure 27 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 24 – Partition.

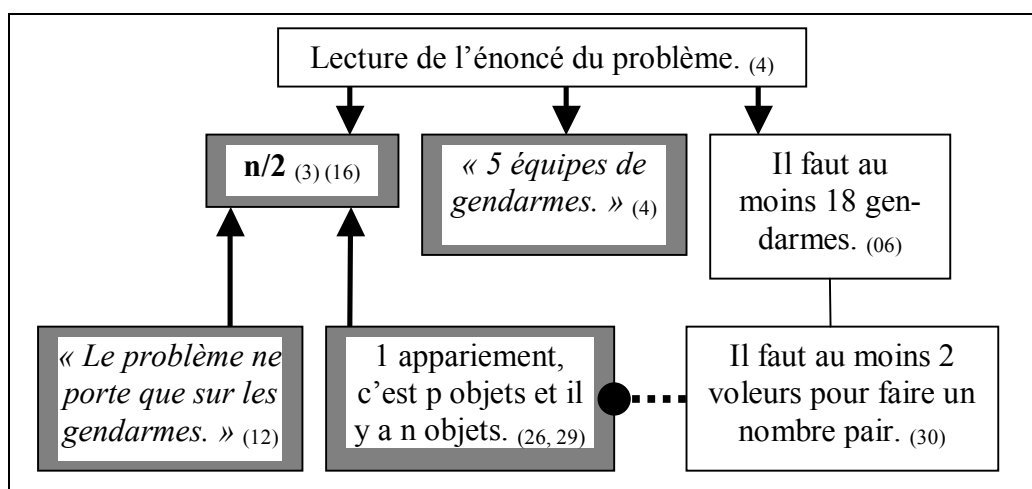


Figure 28 : Modélisation des échanges entre les élèves du protocole 25 – Sélection.

**Emergence des procédures pour chaque élève au cours de sa participation à l'atelier de résolution de problème.**

<b>Protocole 01 – Association (salutations)</b>		
<b>Lucile</b>	<b>Cédric</b>	<b>Yaëlle</b>
n/2 (8)	n/2 (2)	n/2 (4, 8)
	n.n (15)	
n/2 (27)		n/2 (27)
	n.n/2 (31)	
		2 objets → 1 appariement n objets → (n/2 fois plus) (35, 37)
	n.2 (51)	n.n (46, 48)
	n.n-1 (58, 84)	
	Enumération systématique sur figure. (139)	
		n.n-1 (144)
n/2 (149)		

<b>Protocole 02 – Partition</b>		
<b>Eve</b>	<b>Claire</b>	<b>Natasha</b>
Enumération systématique sur liste. (12)		
	n/2 (15)	
		n.2 (16)
n.n-2 (17)		
	n.2 (18)	
	Enumération systématique sur liste. (22)	
	n.n-1 (26)	
n.n (48)		
		n.2 (52)
		Enumération systématique sur figure. (70)

<b>Protocole 03 – Distribution</b>		
<b>Anthony</b>	<b>Benjamin</b>	<b>Quentin</b>
Enumération partitive sur figure (7)	Enumération partitive sur figure. (5 – 13)	
Enumération systématique sur une partie de la figure.		

(17, 21, 23, 28)		
	n.n (27)	
Nbr d'appariements sur une sous partie x nbr de sous parties. (28, 29)		
Nbr d'appariements sur une ligne de la grille x nbr de lignes + nbr d'appariements sur une colonne x le nbr de colonnes. (31, 36)		
		n.n (39)
		1 objet → 20 appariements 2 objets → 2 fois plus 20 objets → 20 fois plus (48)
		n.n (76)
	n.n (80)	

Protocole 04 – Sélection		
Mathilde	Robine	Nicolas
Enumération partitive sur figure.		
	n/2 (19)	

Protocole 05 – Association (segments)		
Alexandre	Benjamin	Nicolas
		Enumération systématique sur figure. (3, 5, 9)
	$n + n-1 + n-2 \dots + 2 + 1$ (8)	

Protocole 06 – Sélection		
Solenne	Alexia	Laurène
		n/2 (6)
	n/2 (7)	
		Enumération systématique sur figure. (23)
		n.n (56)
		Pour n=5, n.n/2 et $n + n-1 + \dots + 1$ (63, 67)
		Pour n=6, n.n/2 et $n-1 + n-2 + \dots + 1$ (71, 83)
		n.n-1 (130)

Protocole 07 – Distribution		
Melody	David	Samuel
		Enumération systématique sur figure. (4)
Enumération partitive sur figure. (5 – 10)	Procédure partitive. (6)	
		n-1.n-1 (7)
		Enumération systématique sur figure. (15)
Enumération systématique sur figure. (23)	Enumération systématique sur figure. (24)	
Nbr d'appariements sur une sous partie x nbr de sous parties. (28 - 55)		
		n-1 + n-2 ... + 2 + 1 (59)
		n.n-1 (65)
	... /2 (107)	

Protocole 08 – Associations (segments)		
Maggy	Ibtesssem	Fanny
	Enumération circulaire sur figure. (5, 6)	
	Enumération circulaire sur figure. (21)	
		Enumération circulaire sur figure. (35, 37)

Protocole 09 – Partition		
Philippe	Andy	Alexis
Enumération systématique sur figure à partir du premier objet. (1)		
n.n-1 (4)		
n-1 + n-2 + ... + 2 + 1 (8)		

Protocole 10 – Association (salutations)		
Hazim	Charlotte	Zoltan
n.2 ou n.n (1)		
	2.n (2)	2.n (3)
Enumération systématique entre-eux (7)		
		n.n (11)
	n.n (13, 30, 43)	
n.n/2 (48)		
	Enumération systématique sur figure à partir du pre-	

	mier objet. (43)	
	$n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1$ (107)	
$n/2$ (120)		
		Enumération circulaire sur figure. ( ? ) (123)
		Enumération partitive sur figure. (125)
	Enumération systématique sur figure à partir du premier objet. (132)	
$.2$ (133)		$n.2$ (134)
	$n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1$ (152)	

Protocole 12 – Distribution		
Jérémie	Valentin	Tom
		$x=20$ (14)
	$20 \times 4$ (20)	
	$4 \times 5$ (22)	
$n/2$ (29, 31)		
Enumération partitive sur figure. (63)		
	Enumération systématique sur figure à partir du premier objet. (76)	
	$n.n$ (84, 109)	
$n.n$ (94)		
$2.2.n$ (112)		
		Enumération circulaire sur figure. (127)
	Enumération systématique sur figure à partir du premier objet, puis du deuxième objet. (128)	
		$n.n-1$ (131)
$n.n-1$ (132)		
	$n.n$ (133)	

Protocole 13 – Sélection		
Gabriel	Raphaëlle	Sébastien
		$n/2$ (1)
$n + n-1.n$ (22)		
	$n + n-1$ (43)	
$n.n-1$ (45)		
		$n.n$ (54)
	$n.n-1 + n.n-2 + n.n-3 + \dots$	



	(59)	
		$n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1$ (66)

Protocole 14 – Association (salutations)		
Luc	Elvys	Candice
	$n.2$ (15)	
$n.n$ (16)		
$n.n-1$ (65)		

Protocole 15 – Association (salutations)		
Amina	David	Thomas
Procédure partitive. (2)		
$x=n$ (10)		
Procédure partitive. (15)		
	Enumération systématique sur figure à partir du premier objet. (18)	
		$n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1$ (27)

Protocole 16 – Partition		
Matthieu	Laure	Alexandre
Enumération circulaire ? (5, 7)		
	Procédure partitive. (10)	
$10 \times 19$ (11)		
	Enumération partitive sur figure. (16)	
Enumération partitive sur figure. (19)		
$n.n-2$ (37)		
$n.n-1$ (47)	$n.n-1$ (55)	
$(n.n-1)-n$ (60)		
	$n/2$ (73)	
$.2$ (76)		
$n/2$ (86)		

Protocole 17 – Association (salutations)		
Victoria	Sibyl	Lior
2 objets $\rightarrow$ 1 appariement $n$ objets $\rightarrow$ ( $n/2$ ) (2, 4)		
	$n/2$ (5)	
	$x=n$ (9)	
$n.n-1$ (15)		
	Procédure partitive (26)	
	(2 objets $\rightarrow$ 1 appariement) donc $n$ objets $\rightarrow$ $n/2$ (28)	